

# A

## APÉNDICE

### Cálculo de la amplitud de distribución del pion

En esta sección se extiende el cálculo de la amplitud de distribución del pion (PDA), detallando los pasos presentados por Courtoy [1]. La evaluación de la PDA,  $\phi(x)$ , permite establecer las convenciones y fijar los parámetros para el modelo. Además, los resultados obtenidos servirán para determinar su idoneidad para describirla.

Por definición, la PDA se escribe como

$$\int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i(x-\frac{1}{2})p^+z^-} \langle 0 | \bar{q}\left(-\frac{z}{2}\right) \not{p} \gamma_5 \tau^- q\left(\frac{z}{2}\right) | \pi(p) \rangle \Big|_{z^+=z^\perp=0} = \frac{1}{p^+} i\sqrt{2} f_\pi \phi(x), \quad (\text{A.1})$$

con  $p^+$  y  $z^-$  componentes en el cono de luz de los 4-vectores. Y que asimismo satisface la condición de normalización

$$\int_0^1 dx \phi(x) = 1.$$

El modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) se usa para describir el pion  $\pi$  como estado ligado con 4-momento  $p$ , cuya amplitud Bethe-Salpeter (BS) está dada por

$$\chi_{\beta\alpha}(x_1, x_2\pi) = \langle 0 | T q_\beta(x_1) \bar{q}_\alpha(x_2) | \pi(p) \rangle.$$

Al resolver la ecuación de Bethe-Salpeter en la aproximación de escalera (*ladder approximation*) con el kernel  $V(k, k'; p)$ <sup>1</sup> la amplitud BS resulta ser

$$\chi(k; p) = iS\left(k + \frac{p}{2}\right)\Phi(k, p)iS\left(k - \frac{p}{2}\right). \quad (\text{A.2})$$

donde  $S^{-1}(k) = \not{k} - m$  y la función del vértice quark-pion

$$\Phi(k, p) = ig_{\pi qq}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}^\pi,$$

con la constante de acoplamiento quark-pion  $g_{\pi qq}$  determinada por la normalización estándar de la ecuación BS.

La PDA se evalúa desarrollando el elemento de matriz del *r.h.s* de (A.1) y reacomodando los términos con el fin de identificar la amplitud BS  $\chi(k; p)$ , tal que

$$\begin{aligned} i\frac{\sqrt{2}f_\pi}{p^+}\phi(x) &= \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i(x-\frac{1}{2})p^+z^-} \langle 0 | \bar{q}_\alpha\left(-\frac{z}{2}\right) (\not{p}\gamma_5\boldsymbol{\tau}^-)_{\alpha\beta} q_\beta\left(\frac{z}{2}\right) | \pi(p) \rangle, \\ &= - \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ip^+(x-\frac{1}{2})z^-} \langle 0 | q_\beta\left(\frac{z}{2}\right) \bar{q}_\alpha\left(-\frac{z}{2}\right) | \pi(p) \rangle (\not{p}\gamma_5\boldsymbol{\tau}^-)_{\alpha\beta}, \\ &= - \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ip^+(x-\frac{1}{2})z^-} \chi_{\beta\alpha}\left(\frac{z}{2}, -\frac{z}{2}\right) (\not{p}\gamma_5\boldsymbol{\tau}^-)_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Para pasar al espacio de momentos definimos la transformada de Fourier como

$$\chi_P(x_1, x_2) = e^{-iPX} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot r} \chi(k, P)$$

con centro de masa y coordenadas relativas  $X = \mu_1 x_1 / (m_1 + m_2)$  y  $r = x_1 - x_2$ , respectivamente, con  $\mu_{1,2} = m_{1,2} / (m_1 + m_2)$ . En el límite quiral, las masas de los quarks satisfacen que  $m_1 = m_2$ , entonces  $\mu_{1,2} = 1/2$ ,

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{z}{2}\right) = \frac{z}{2}(1 - 1) = 0, \\ r &= \frac{z}{2} - \left(-\frac{z}{2}\right) = \frac{z}{2} + \frac{z}{2} = z. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> $V_{\alpha\beta, \delta\gamma}(k, k'; p) = 2iG(i\gamma_5\boldsymbol{\tau}^\pi)_{\delta\gamma}(i\gamma_5\boldsymbol{\tau}^\pi)_{\alpha\beta}$ .

Esto implica que

$$\chi_P(x_1, x_2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot z} \chi(k, P)$$

Por lo tanto, (A.3) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} i \frac{\sqrt{2} f_\pi}{p^+} \phi(x) &= - \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ip^+(x-\frac{1}{2})z^-} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot z} \chi_{\alpha\beta}(k, p) \left( \not{p} \gamma_5 \tau^- \right)_{\alpha\beta}, \\ &= - \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ip^+(x-\frac{1}{2})z^-} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot z} \text{Tr} \left[ \chi(k, p) \not{p} \gamma_5 \tau^- \right], \\ &= - \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ip^+(x-\frac{1}{2})z^-} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot z} \\ &\quad \times \text{Tr} \left[ i S \left( k + \frac{p}{2} \right) i g_{\pi qq} i \gamma_5 \tau^\pi i S \left( k - \frac{p}{2} \right) \not{p} \gamma_5 \tau^- \right], \\ &= - (-i g_{\pi qq}) N_c \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ip^+(x-1/2)z^-} \\ &\quad \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik^+ z^-} \text{tr} \left[ S \left( k + \frac{p}{2} \right) i \gamma_5 \tau^{\pi^+} S \left( k - \frac{p}{2} \right) \not{p} \gamma_5 \tau^- \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

El operador  $\text{Tr}$  indica la traza sobre los espacios de Dirac, isospín, sabor y color. El número de color  $N_c$  surge de evaluar la traza en el espacio de color, dado que el propagador es proporcional a  $1_c$ , se tiene que  $\text{tr}(1_c) = N_c$ . Posteriormente, se obtiene la traza en el espacio de isospín para  $\pi^+$ . Por otro lado, al reducir el producto escalar en el cono de luz, obtenemos  $k \cdot z = k z^-$ . Esto se debe a que la separación espacial cumple  $z^+ = z^\perp = 0$ , de modo que  $k \cdot z = k^+ z^- + k^\perp \cdot \mathbf{0}$ .

Sin embargo, aún es posible simplificar  $\text{tr}[\dots]$  a 1.

$$\text{tr} \left[ S \left( k + \frac{p}{2} \right) i \gamma_5 \tau^{\pi^+} S \left( k - \frac{p}{2} \right) \not{p} \gamma_5 \tau^- \right] = \text{tr} \left[ \left( \frac{k^+ \frac{p}{2} + m}{\left( k + \frac{p}{2} \right)^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) i \gamma_5 \tau^\pi \left( \frac{k^- \frac{p}{2} + m}{\left( k - \frac{p}{2} \right)^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) \not{p} \gamma_5 \tau^- \right].$$

Obsérvese que el denominador es un escalar. Para aligerar la notación lo definimos como  $D = [(k + \frac{p}{2})^2 - m^2 + i\varepsilon][(k - \frac{p}{2})^2 - m^2 + i\varepsilon]$ , lo cual nos permite enfocarnos en el numerador, obteniendo

$$\text{tr} \left[ \left( k + \frac{p}{2} + m \right) i \gamma_5 \tau^{\pi^+} \left( k - \frac{p}{2} + m \right) \not{p} \gamma_5 \tau^- \right] = i \text{tr} \left[ \left( k + \frac{p}{2} + m \right) \tau^{\pi^+} \gamma_5 \left( k - \frac{p}{2} + m \right) \not{p} \gamma_5 \tau^- \right],$$

$$= i \operatorname{tr} \left[ \left( \not{k} + \frac{\not{p}}{2} + m \right) \tau^{\pi^+} \tau^- \left( -\not{k} + \frac{\not{p}}{2} + m \right) \gamma_5 \not{p} \gamma_5 \right].$$

Las matrices de isospín y las matrices de Dirac actúan sobre espacios distintos, por lo que conmutan entre sí y pueden reordenarse sin alterar el signo de la expresión; mientras que las matrices de Dirac  $\gamma_\mu$  anticonmutan con  $\gamma_5$ , además de satisfacer que  $(\gamma_5)^2 = 1$ . Por otro lado, se tiene que  $\tau^{\pi^+} \tau^- = \sqrt{2} \tau^+ \tau^- = \sqrt{2} \operatorname{diag}(1, 0)$ , de modo que la traza es  $\sqrt{2}$ . Es decir,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left[ \left( \not{k} + \frac{\not{p}}{2} + m \right) i \gamma_5 \tau^{\pi^+} \left( \not{k} - \frac{\not{p}}{2} + m \right) \not{p} \gamma_5 \tau^- \right] &= -i \sqrt{2} \operatorname{tr} \left[ \left( \not{k} + \frac{\not{p}}{2} + m \right) \left( -\not{k} + \frac{\not{p}}{2} + m \right) \not{p} \right], \\ &= -i \sqrt{2} \operatorname{tr} \left[ -\not{k} \not{k} \not{p} + \frac{1}{2} \not{k} \not{p} \not{p} + m \not{k} \not{p} - \frac{1}{2} \not{p} \not{k} \not{p} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \not{p} \not{p} \not{p} + \frac{m}{2} \not{p} \not{p} - m \not{k} \not{p} + \frac{m}{2} \not{p} \not{p} + m^2 \not{p} \right]. \end{aligned}$$

Usando la linealidad de la traza y que la traza de un número impar de matrices  $\gamma_\mu$  se anula.

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left[ \left( \not{k} + \frac{\not{p}}{2} + m \right) i \gamma_5 \tau^{\pi^+} \left( \not{k} - \frac{\not{p}}{2} + m \right) \not{p} \gamma_5 \tau^- \right] &= -i \sqrt{2} m \operatorname{tr} [\not{p} \not{p}], \\ &= i \sqrt{2} (-4m). \end{aligned}$$

Reemplazando en (A.4),

$$\begin{aligned} i \sqrt{2} f_\pi \phi(x) &= -i(-4m) p^+ (-i g_{\pi qq}) N_c \sqrt{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ip^+(x-\frac{1}{2})z^-} e^{-ik^+z^-} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{D}, \\ &= -i(-4m) p^+ (-i g_{\pi qq}) N_c \sqrt{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i(p^+(x-\frac{1}{2})-k^+)z^-} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{D}, \\ &= -i(-4m) p^+ (-i g_{\pi qq}) N_c \sqrt{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\delta(p^+(x-\frac{1}{2})-k^+)}{D}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Aplicando la sustitución  $k \rightarrow -k + \frac{p}{2}$  en los términos correspondientes. Para el primer término tenemos

$$\begin{aligned} \left( k - \frac{p}{2} \right)^2 &= \left( \left( -k + \frac{p}{2} \right) - \frac{p}{2} \right)^2 = (-k)^2, \\ &= 2k^+ k^- - \mathbf{k}_\perp^2. \end{aligned}$$

Y para el segundo término

$$\begin{aligned} \left(k + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\left(-k + \frac{p}{2}\right) + \frac{p}{2}\right)^2 = (-k + p)^2, \\ &= 2(p^+ - k^+)(p^- - k^-) - (\mathbf{p}^\perp - \mathbf{k}^\perp)^2. \end{aligned}$$

Con los resultados anteriores,  $D$  puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} D &= [2k^+k^- - \mathbf{k}_\perp^2 - m^2 + i\varepsilon] [2(p^+ - k^+)(p^- - k^-) - (\mathbf{p}^\perp - \mathbf{k}^\perp)^2 - m^2 + i\varepsilon], \\ D &= D_1 D_2. \end{aligned}$$

Por último, para el argumento de la función delta de Dirac, aprovechando su paridad,

$$\begin{aligned} \delta\left(p^+\left(x - \frac{1}{2}\right) - k^+\right) &= \delta\left(p^+\left(x - \frac{1}{2}\right) - \left(-k^+ + \frac{p^+}{2}\right)\right) = \delta\left(p^+(x - 1) + k^+\right), \\ &= \delta\left(-\left(p^+(1 - x) - k^+\right)\right) = \delta\left(p^+(1 - x) - k^+\right). \end{aligned}$$

Insertando en (A.5),

$$i\sqrt{2}f_\pi\phi^{\pi^+}(x) = -4mig_{\pi qq}N_c\sqrt{2}ip^+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\delta(p^+(1-x) - k^+)}{D_1 D_2}.$$

La presencia de la función  $\delta$  impone una descomposición en las componentes del cono de luz para poder resolver la integral sobre  $d^4k$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2k^\perp}{(2\pi)^2} \int dk^- \int dk^+.$$

Nótese el uso indistinto de  $k_\perp$  y  $k^\perp$ .

La integral sobre  $dk^+$  es trivial, i.e. afecta únicamente a los términos  $D_1$  y  $D_2$  del denominador. La función  $\delta$  impone la componente-+ del momento transportado por el quark resultante.

$$\begin{aligned} D_1 &= 2p^+(1-x)k^- - \mathbf{k}_\perp^2 - m^2 + i\varepsilon, \\ &= 2p^+(1-x) \left[ k^- - \frac{\mathbf{k}_\perp^2 + m^2}{2p^+(1-x)} + \frac{i\varepsilon}{2p^+(1-x)} \right]. \end{aligned} \tag{A.6}$$

y

$$\begin{aligned}
D_2 &= 2(p^+ - 2p^+(1-x))(p^- - k^-) - (\mathbf{p}^\perp - \mathbf{k}^\perp)^2, \\
&= 2p^+x(p^- - k^-) - ((\mathbf{p}^\perp - \mathbf{k}^\perp)^2 + m^2) + i\varepsilon, \\
&= 2p^+x \left[ p^- - k^- - \frac{(\mathbf{p}^\perp - \mathbf{k}^\perp)^2 + m^2}{2p^+x} + \frac{i\varepsilon}{2p^+x} \right].
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Con esto procedemos realizar la integración respecto a  $dk^-$ , apoyándonos del teorema del residuo y recordando que  $\mathbf{p}^\perp = \mathbf{0}$ ,  $p^+ > 0$  y  $0 \leq x \leq 1$ . Como primer paso, debemos encontrar los polos de la función. Para (A.6),

$$k_1^- = \frac{\mathbf{k}_\perp^2 + m^2}{2p^+(1-x)} - \frac{i\varepsilon}{2p^+(1-x)} \tag{A.8}$$

que se encuentra localizado en semiplano inferior, pues  $-\varepsilon/2p^+(1-x) < 0$ .

Ahora, el polo de (A.7) es

$$k_2^- = p^- - \frac{(\mathbf{p}^\perp - \mathbf{k}^\perp)^2 + m^2}{2p^+x} + \frac{i\varepsilon}{2p^+x}. \tag{A.9}$$

localizado en el semiplano superior. Reescribiendo (A.6) y (A.7) en términos de (A.8) y (A.9), la integral a calcular es

$$\int dk^- \frac{-1}{4(p^+)^2x(1-x)(k^- - k_1^-)(k^- - k_2^-)}$$

y eligiendo la curva dada por el semicírculo recorrido en sentido levógiro en el semiplano superior, por el teorema del residuo,

$$\int_\gamma dk^- \frac{1}{(k^- - k_1^-)(k^- - k_2^-)} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{D_1 D_2}, k_2^-\right) \tag{A.10}$$

pues la curva solo encierra al polo  $k_2^-$ . Por lo que el residuo, al tener polos simples se calcula como

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{D_1 D_2}, k_2^-\right) = \lim_{k^- \rightarrow k_2^-} (k^- - k_2^-) \frac{1}{(k^- - k_1^-)(k^- - k_2^-)} = \frac{1}{k_2^- - k_1^-}$$

Simplificando la diferencia  $k_2^- - k_1^-$ ,

$$\begin{aligned}
k_2^- - k_1^- &= p^- - \frac{(\mathbf{p}^\perp - \mathbf{k}^\perp)^2 + m^2}{2p^+x} - \frac{\mathbf{k}_\perp^2 + m^2}{2p^+(1-x)} = p^- - \frac{\mathbf{k}_\perp^2 + m^2}{2p^+} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right), \\
&= p^- - \frac{\mathbf{k}_\perp^2 + m^2}{2p^+x(1-x)} = \frac{m_\pi^2}{2p^+} - \frac{\mathbf{k}_\perp^2 + m^2}{2p^+x(1-x)}, \\
&= -\frac{\mathbf{k}_\perp^2 + m^2 + m_\pi^2x(x-1)}{2p^+x(1-x)}. \tag{A.11}
\end{aligned}$$

Entonces el integrando toma la forma

$$\frac{-1}{4(p^+)^2x(1-x)} \cdot 2\pi i \cdot \frac{-2p^+x(1-x)}{k_\perp^2 + m^2 + m_\pi^2x(x-1)} = \frac{\pi i}{p^+(k_\perp^2 + M^2)}. \tag{A.12}$$

donde  $M^2 = m^2 + m_\pi^2x(x-1)$ . Para obtener la integral sobre  $d^2k^\perp$  debe transformarse a coordenadas polares y hacerse un cambio de variable dado por  $u = k_\perp^2$  tal que  $du = 2k^\perp dk^\perp$ .

$$\begin{aligned}
\frac{i}{4\pi p^+} \int d^2k^\perp \frac{1}{k_\perp^2 + M^2} &= \frac{i}{4\pi p^+} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dk^\perp \frac{k^\perp}{k_\perp^2 + M^2} = \frac{i}{4p^+} \int_0^\infty du \frac{1}{u + M^2}, \\
&= \frac{i}{4\pi p^+} \left[ \ln(k_\perp^2 + M^2) \right]_0^\infty.
\end{aligned}$$

Notemos que la función diverge en  $\infty$  y en el estudio de las TDAs es importante preservar tanto la covariancia de Lorentz como la invariancia de *gauge*. El esquema de Pauli-Villars satisface estas condiciones, introduciendo un número mínimo de masas reguladoras  $m_j$  y constantes  $c_j$  de tal forma que el resultado se vuelva finito, mediante la sustitución<sup>[1]</sup>

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} f(p, m^2) \mapsto \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \sum_{j=0}^2 c_j f(p, m_j^2)$$

donde los valores estándar de los coeficientes son  $c_0 = c_2 = 1$  y  $c_1 = -2$ . Entonces la integral con esta regularización es

$$\frac{i}{4\pi p^+} \sum_{j=0}^2 c_j \left[ \ln(k_\perp^2 + M_j^2) \right]_0^\infty. \tag{A.13}$$

Evaluando los los límites,

- $k^\perp \rightarrow \infty$

Expandiendo el logaritmo,

$$\sum_{j=0}^2 c_j \ln(k_\perp^2 + M_j^2) = \sum_{j=0}^2 c_j \ln(k_\perp^2 + M_j^2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k_\perp^2}\right) \rightarrow 0$$

por la propiedad que satisfacen los coeficiente,  $\sum_{j=0}^2 c_j = 0$ .

- $k^\perp = 0$

$$-\sum_{j=0}^2 c_j \ln(0 + M_j^2) = -\sum_{j=0}^2 c_j \ln M_j^2.$$

Y nuevamente por la característica de los coeficientes podemos introducir una escala de referencia  $m^2$ , tal que

$$\begin{aligned} -\sum_{j=0}^2 c_j \ln M_j^2 + \sum_{j=0}^2 c_j \ln m^2 &= -\sum_{j=0}^2 c_j \ln \frac{M_j^2}{m^2}, \\ &= -\sum_{j=0}^2 \ln \frac{m_j^2 + m_\pi^2 x(1-x)}{m^2}. \end{aligned}$$

Al introducir lo anterior en (A.13)

$$\frac{-i}{4\pi p^+} \sum_{j=0}^2 \ln \frac{m_j^2 + m_\pi^2 x(1-x)}{m^2}.$$

Como resultado final, la integral en  $d^4k$  es

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\delta(p^+(1-x) - k^+)}{D = [(k + \frac{p}{2})^2 - m^2 + i\varepsilon][(k - \frac{p}{2})^2 - m^2 + i\varepsilon]} = -\frac{i}{(4\pi)^2 p^+} \sum_{j=0}^2 \ln \frac{m_j^2 + m_\pi^2 x(1-x)}{m^2}$$

lo cual es proporcional a la integral de dos propagadores  $\tilde{I}_{2,p}(x, \xi = 0)$ . En límite quiral la PDA es igual a la constante 1.