Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Notas del servicio social

Teoría de grupos, simetrías y rompimiento espontáneo de simetrías

Marcos López Merino

Ciudad Universitaria, CD. MX., 2026

Capítulo 1

Preliminares matemáticos

En física es habitual adoptar un enfoque pragmático de las matemáticas, relegando su formalismo abstracto un segundo plano la mayor parte del tiempo. Sin embargo, cuando nuestro estudio se dirige a los constituyentes más fundamentales del Universo, resulta indispensable familiarizarse con herramientas más rigurosas como los grupos y álgebras de Lie. Estas estructuras matemáticas son el lenguaje natural para describir las simetrías globales y de *gauge*. Son útiles no solo para representar simetrías en el espaciotiempo (como traslaciones, rotaciones y transformaciones de Lorentz), sino también para describir simetrías internas intrínsecas a las partículas, como el isospín o la carga de color.

1.1. Grupos de Lie

1.1.1. Definiciones y propiedades generales

Los grupos de Lie son grupos con una estructura adicional: la de variedad diferencial. Recordemos que un **grupo** G es un conjunto de elementos $g_1, g_2, \ldots$ que satisface los siguientes axiomas

1. **Cerradura**: Para cada $g_1, g_2 \in G$, el producto $g_1 g_2 = g_3$ también pertenece a G.
2. **Asociatividad**: Para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$, $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$.
3. **Identidad**: Existe un elemento identidad $I \in G$ tal que $Ig = gI = g$ para todo $g \in G$.
4. **Inverso**: Para cada $g \in G$ existe un elemento inverso g^{-1} tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = I$ para todo $g \in G$.

Nótese que los elementos del grupo pueden ser discretos o depender de parámetros continuos. Entre los casos especiales destacan los **grupos abelianos**, en los que $g_1 g_2 = g_2 g_1$ para todo $g_1, g_2 \in G$, es decir, los elementos conmutan; en caso contrario, el grupo es **no abeliano**. Un subconjunto de elementos de G que forma un grupo bajo la misma ley multiplicativa recibe el nombre de **subgrupo** de G.

Un **grupo de Lie** es un grupo G que además tiene la estructura de una variedad diferenciable, de modo que el producto e inverso son suaves (infinitamente diferenciables). La mayoría de los grupos de Lie de interés en física de partículas son compactos, lo que significa que son cerrados y acotados—contienen todos sus puntos límite y no se extienden al infinito. Los grupos $SU(n)$ son ejemplos de grupos compactos.

Finalmente, dado que en física es frecuente trabajar con más de un grupo a la vez, conviene mencionar el **producto directo** de dos grupos G y H usualmente denotado por $G \times H$. En el contexto de grupos abelianos, a esta misma construcción se le conoce como la suma directa, denotada por $G \oplus H$.

1.1.2. Algunos ejemplos de grupos de Lie

Los grupos de mayor utilidad en el Modelo Estándar pertenecen a la clase de los **grupos matriciales de Lie**, que son subgrupos del grupo lineal general. El **grupo lineal general** $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ es el conjunto de todas las matrices $n \times n$ invertibles con entradas reales; de manera análoga, $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ representa a las matrices con entradas complejas. Un grupo matricial de Lie es entonces cualquier grupo cerrado de $\mathrm{GL}(n;V)$ para algún espacio vectorial V. A continuación se presentan los ejemplos más relevantes para estas notas.

Grupo unitario $U(n)$

El grupo unitario $U(n)$ es el subgrupo formado por matrices unitarias U que satisfacen

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I.$$

El caso más sencillo es $U(1)$, que corresponde al grupo de transformaciones unitarias de fase sobre los números complejos. Dado $z \in \mathbb{C}$, la acción de $U(1)$ es $z \mapsto \mathrm{e}^{i\theta} z$ con $\theta \in [0, 2\pi]$. Esto se comprende de manera visual al notar que $U(1)$ es isomorfo al círculo unitario S^1.

Grupo especial unitario $SU(n)$

El grupo especial unitario $SU(n)$ es el subgrupo de $U(n)$ formado por aquellas matrices cuyo determinante es igual a 1. Esta condición restringe un grado de libertad, por lo que la dimensión de este grupo es $n^2 - 1$.

El caso más inmediato es $SU(2)$, que depende de tres parámetros continuos y puede parametrizarse como

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ y } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Este grupo es isomorfo a la esfera unitaria S^3. Físicamente, es la herramienta matemática subyacente para describir el espín y el isospín.

Por su parte, $SU(3)$ es el grupo de matrices 3×3 complejas unitarias con determinante igual a 1 y juega un rol central en la física hadrónica, correspondiendo a la carga de color en cromodinámica cuántica (QCD).

1.2. Álgebras de Lie

1.2.1. Definiciones

Un grupo de Lie y su ley multiplicativa pueden estudiarse localmente a través de transformaciones infinitesimales por su **álgebra de Lie** asociada. Esta álgebra está conformada por N **generadores** (operadores) T^i, con $i = 1, 2, \cdots, N$, que satisfacen las reglas de conmutación

$$[T^i, T^j] = ic_{ijk}T^k, \tag{1.2.1}$$

donde la suma sobre el índice repetido k está implícita y los coeficientes $c_{ijk} = -c_{jik}$ son las **constantes de estructura** de G. Sin pérdida de generalidad, podemos elegir que T^i sean hermíticos, lo que garantiza que sus constantes de estructura son reales. Si $c_{ijk} = 0$, entonces G es abeliano. Cualquier elemento del grupo G puede representarse como una serie de potencias por medio de operadores unitarios

$$U_G(\vec{\beta}) = \exp[-i\beta^i T^i] \equiv \mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{T}} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\vec{\beta}\cdot\vec{T})^k}{k!}, \tag{1.2.2}$$

donde $\beta^1 \cdots \beta^N$ son N parámetros reales continuos. En particular, el elemento identidad corresponde a $U_G(0) = I$ y el inverso de $U_G(\vec{\beta})$ está dado por

$$U_G(\vec{\beta})^{-1} = U_G(-\vec{\beta}) = \mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{T}} = U_G(\vec{\beta})^\dagger. \tag{1.2.3}$$

Para valores pequeños de $|\vec{\beta}|$, es suficiente truncar la serie (1.2.2) hasta el término lineal,

$$U_G(\vec{\beta}) \simeq I - i\vec{\beta}\cdot\vec{T} + \mathcal{O}(\beta_i\beta_j). \tag{1.2.4}$$

Esto significa que los generadores del álgebra de Lie describen por completo a la vecindad de la identidad. El álgebra también dicta la ley multiplicativa del grupo para parámetros $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ finitos. Esto es

$$U_G(\vec{\alpha})U_G(\vec{\beta}) = \mathrm{e}^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{T}} \equiv U_G(\vec{\gamma}). \tag{1.2.5}$$

$\vec{\gamma}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ puede determinarse íntegramente a partir del álgebra de Lie utilizando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH). Aunque esta serie no siempre converge globalmente, para $|\vec{\alpha}|$ y $|\vec{\beta}|$ lo suficientemente pequeños tenemos:

$$\vec{\gamma}\cdot\vec{T} = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})\cdot\vec{T} - \frac{i}{2}[\vec{\alpha}\cdot\vec{T}, \vec{\beta}\cdot\vec{T}] + \text{h.o.t.} \tag{1.2.6}$$

La verdadera potencia de estas estructuras abstractas en la física radica en su capacidad para actuar sobre distintos espacios vectoriales, como los espacios de Hilbert que albergan los estados cuánticos. Cuando asignamos a los elementos del grupo una forma matricial concreta actuando sobre un espacio específico, construimos una **representación** del grupo.

1.2.2. Representaciones

Una representación es, en esencia, una traducción del álgebra abstracta al lenguaje de las transformaciones lineales (álgebra lineal).

Consideremos un conjunto de matrices $n \times n$ denotadas como $L^i, i = 1, 2, \cdots N$. Si los elementos L^i satisfacen la misma álgebra que los generadores,

$$[L^i, L^j] = ic_{ijk}L^k, \tag{1.2.7}$$

entonces L^i (algunas veces escrito como L^i_n) forman una representación del álgebra. Análogamente, las matrices e$^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}}$ forman una representación del grupo para los elementos $U_G(\vec{\beta})$ y preservan la misma ley multiplicativa.

El **rango** de un grupo de Lie se define como el número de generadores que son simultáneamente diagonalizables. Físicamente, estos generadores corresponden a números cuánticos que se conservan si conmutan con el Hamiltoniano.

Dos representaciones $n \times n$, L^i y L'^i, son **equivalentes** si existe una $n \times n$ matriz unitaria U tal que

$$L'^i = UL^iU^\dagger, \quad i = 1 \cdots N. \tag{1.2.8}$$

De lo contrario, no lo son. Una representación L^i es **reducible** si es equivalente a una representación estructurada en bloques diagonales,

$$L'^i = \begin{pmatrix} L'^i_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L'^i_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L'^i_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \tag{1.2.9}$$

donde cada bloque actúa de forma independiente sobre un subespacio único. En caso contrario, se dice que es **irreducible** (IRREP). Los estados bajo una representación reducible se separan en sectores aislados que no están relacionados por la simetría, mientras que todos los estados en una misma IRREP están relacionados por las transformaciones del grupo.

La **representación fundamental** es, *grosso modo*, la representación no trivial de menor dimensión, a partir de la cual se pueden generar otras representaciones mediante productos directos.

Por otro lado, la **representación adjunta** o **regular** de un grupo de Lie es aquella representación de dimensión $N \times N$ cuyos elementos se construyen directamente a partir de las constantes de estructura:

$$(L^i_{\text{adj}})_{jk} = -ic_{ijk}. \tag{1.2.10}$$

Esta representación adjunta es esencial para definir las autointeracciones de los campos en una teoría de *gauge* no abeliana.

Finalmente, si L^i_n es una representación de dimensión n, entonces su **conjugada** $L^i_{n^*} \equiv -L^{i*}_n = -L^{iT}_n$ también es una representación. Una representación se dice **real** si es equivalente a su propia conjugada; es decir, si existe una matriz unitaria U tal que $-L^{i*}_n = UL^i_nU^\dagger$ para todo i; de lo contrario, se denomina **compleja**.

Capítulo 2

Simetrías

Las simetrías forman una parte fundamental de la física, ya que habitualmente los sistemas que se mantienen invariantes bajo ciertas transformaciones simplifican su análisis; pero incluso cuando esto no ocurre, se producen fenómenos interesantes, como lo es el mecanismo que otorga masa a las partículas.

2.1. Simetrías globales y locales

Se dice que los sistemas físicos tienen simetrías si permanecen invariantes bajo una transformación. Estas simetrías habitualmente están asociadas a cantidades que se conservan.

Sin embargo, no es posible hablar de simetrías sin mencionar el **teorema de Noether**, el cual establece que si un Lagrangiano posee una simetría continua, entonces existe una corriente asociada a esa simetría que se conserva cuando las ecuaciones de movimiento se satisfacen.

Veamos esto con un ejemplo. Sea $\mathcal{L}$ el Lagrangiano para un campo complejo ϕ:

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2|\phi|^2. \tag{2.1.1}$$

Este Lagrangiano es invariante bajo $\phi \to \mathrm{e}^{-i\alpha}\phi$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$. Esta transformación representa una *simetría* del Lagrangiano. Existen dos grados de libertad independientes en un campo complejo ϕ, es decir, $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ o, de manera más conveniente, ϕ y ϕ^*, por lo que el Lagrangiano adopta la forma

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial_\mu \phi^*) - m^2\phi\phi^*, \tag{2.1.2}$$

cuyas transformaciones de simetria son:

$$\phi \to \mathrm{e}^{-i\alpha}\phi, \quad \phi^* \to \mathrm{e}^{i\alpha}\phi^*. \tag{2.1.3}$$

Dado que la simetría depende de un parámetro continuo α, podemos realizar variaciones infinitesimales del campo. La variación del Lagrangiano está dada por

$$0 = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \alpha} = \sum_n \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_n} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_n)} \right] \frac{\delta \phi_n}{\delta \alpha} + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_n)} \frac{\delta \phi_n}{\delta \alpha} \right] \right\}, \tag{2.1.4}$$

donde ϕ_n puede ser ϕ o ϕ^*.

Cuando se satisfacen las ecuaciones de movimiento, el primer término entre corchetes se anula y esta expresión se reduce a $\partial_\mu J_\mu = 0$, donde hemos definido la **corriente de Noether** como

$$J_\mu = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_n)} \frac{\delta \phi_n}{\delta \alpha} \tag{2.1.5}$$

Aplicando esta definición a nuestro Lagrangiano, notamos que

$$\frac{\delta \phi}{\delta \alpha} = -i\phi, \quad \frac{\delta \phi^*}{\delta \alpha} = i\phi^* \tag{2.1.6}$$

lo que implica que la corriente toma la forma

$$J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{\delta \phi}{\delta \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \frac{\delta \phi^*}{\delta \alpha} = -i(\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi). \tag{2.1.7}$$

Podemos verificar explícitamente que la divergencia de esta corriente

$$\partial_\mu J_\mu = -i[\phi \Box \phi^* - \phi^* \Box \phi] \tag{2.1.8}$$

es igual a cero cuando las ecuaciones de movimiento, $\Box \phi = -m^2 \phi$ y $\Box \phi^* = -m^2 \phi^*$, se satisfacen. Un campo vectorial J_μ cuya divergencia es nula define lo que conocemos como una **corriente conservada**.

2.1.1. Simetrías globales

Las **simetrías internas globales** son aquellas que involucran transformaciones de los campos que son independientes de las coordenadas del espaciotiempo, y dejan la dinámica del sistema invariante. El término *global* denota que la misma fase o matriz de transformación se aplica a los campos en todos los puntos del espaciotiempo.

La aplicación del teorema de Noether en presencia de una simetría global implica la existencia de una corriente conservada $J_i^\mu(x)$ para cada generador T^i del grupo de simetría global, con sus respectivas cargas conservadas asociadas:

$$Q_i \equiv \int \mathrm{d}^3x \, J_i^0(x) \tag{2.1.9}$$

las cuales satisfacen las mismas relaciones de conmutación del álgebra de Lie del grupo de simetría

$$[T^i, T^j] = ic_{ijk}T^k \implies [Q_i, Q_j] = ic_{ijk}Q_k. \tag{2.1.10}$$

Debemos recordar que la aplicación del teorema de Noether a las teorías cuánticas de campos (QFTs) debe hacerse cuidadosamente, ya que es posible que los efectos cuánticos impidan la conservación clásica de las corrientes $J_i^\mu(x)$. Esto resulta en una divergencia no nula de orden $\hbar$, $\partial_\mu J_\alpha^\mu(x) = \mathcal{O}(\hbar)$, lo que implica una violación de la simetría o **anomalía**, imperceptible a nivel clásico. Usualmente, las anomalías surgen debido a la minuciosa construcción de operadores compuestos bien definidos que implementen las transformaciones de simetría una vez cuantizada la teoría.

Una **simetría global exacta** puede manifestarse de dos formas distintas, dependiendo de las propiedades de la transformación del estado base de la teoría bajo dicha simetría. Supongamos que la dinámica es exactamente invariante bajo el grupo de simetría G, con un álgebra de Lie dada por los generadores T_i con cargas conservadas Q_i. Imaginemos ahora que los generadores se eligen como combinaciones lineales apropiadas, de tal forma que un subconjunto de las cargas aniquila el vacío físico

$$Q_\alpha|0\rangle = 0 \tag{2.1.11}$$

El conjunto de estos generadores debe formar el álgebra de Lie de un subgrupo $H \subset G$, puesto que $Q_\alpha|0\rangle = Q_\beta|0\rangle = 0 \implies [Q_\alpha, Q_\beta]|0\rangle = 0$. En este caso, decimos que la simetría corresponde a la realización de Wigner-Weyl. Por otro lado, los generadores bajo los cuales el vacío **no** es invariante corresponden a la realización de simetría de Nambu-Goldstone. Por hipótesis, G se preserva en la dinámica, por lo que estos últimos generadores siguen conmutando con el Hamiltoniano, dando como resultado nuevos estados que también son estados de mínima energía, i.e. el vacío está degenerado.

Por el momento omitiremos los detalles acerca del rompimiento espontáneo de simetría, pero podemos mencionar sus consecuencias fundamentales. Para los generadores que dan lugar a la realización de simetría de Nambu-Goldstone, la no invariancia del estado base se traduce en propiedades de transformación complicadas para los multipletes construidos a partir de estos. Además, la existencia de una simetría dinámica exacta subyacente dejar de ser intuitiva fenomenológicamente. Físicamente, al rompimiento espontáneo de una simetría se le atribuye la aparición de una partícula sin masa, conocida como **bosón de Goldstone**.

En realidad, las simetrías globales exactas ocurren raramente en la naturaleza, por lo que es frecuente encontrar **simetrías globales aproximadas**. En estos casos, el rompimiento de la simetría es pequeño, lo cual nos permite tratarla como exacta a orden 0 e introducir el rompimiento explícito mediante un tratamiento perturbativo.

2.1.2. $SU(2)$ como simetría global

El grupo $SU(2)$ es importante en muchos aspectos, entre los que se encuentra la descripción del momento angular de espín en mecánica cuántica, que es isomorfo al momento angular orbital (satisfacen la misma álgebra de Lie con diferentes generadores) y que también describe el isospín, relevante cuando se habla de nucleones, quarks ligeros y en la interacción débil.

Este grupo corresponde al grupo de transformaciones especiales unitarias que actúan sobre vectores $2D$ y la ley multiplicativa corresponde a la multiplicación de matrices usual. La representación fundamental son las matrices 2×2 que actúan sobre estos vectores. Como se mencionó anteriormente, este grupo tiene $2^2 - 1$ parámetros, lo cual corresponde a 3 generadores, denotados por J_1, J_2, J_3. Un conjunto de generadores adecuados puede escribirse en términos de las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.1.12}$$

El álgebra de Lie es

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \tag{2.1.13}$$

donde ϵ_{ijk} corresponde a las constantes de estructura y se le conoce como **símbolo de Levi-Civita**, y habitualmente se le denomina erróneamente como *tensor de Levi-Civita*.

Números cuánticos

El **invariante de Casimir** es una función $f(J)$ que conmuta con todos los generadores J_i, i.e. $[f(J), J_i] = 0$. Para esta representación el único invariante de Casimir es

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \tag{2.1.14}$$

Que conmuten nos dice que pueden tener observables simultáneos y a partir de esto podemos construir eigenestados simultáneos $|jm\rangle$ y uno de los generadores, usualmente J_3, con sus correspondientes eigenvalores

$$\begin{aligned} J^2|jm\rangle &= j(j+1)|jm\rangle, \\ J_3|jm\rangle &= m|jm\rangle, \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

donde $-j \leq m \leq j$ con $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$.

Y recordaremos que mediante los operadores escalera (ascenso y descenso) definidos como

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2. \tag{2.1.16}$$

podemos generar diferentes estados en un multiplete

$$J_{\pm}|jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j, m \pm 1\rangle \tag{2.1.17}$$

subiendo o bajando m una unidad, respectivamente.

Representación $2D$

Al inicio de esta sección, comenzamos con una representación en $2D$ para motivar el grupo $SU(2)$, derivamos su álgebra de Lie y encontramos una forma de identificar a los eigenestados de los generadores mediante resultados de la teoría del momento angular, aunque mencionamos que no era la única forma de hacerlo.

Podemos formar una representación $2D$ ($j = \frac{1}{2}$) eligiendo la base (o conjunto de estados base) como los eigenvectores de σ_3,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.18}$$

que describen a una partícula de espín-$\frac{1}{2}$ arriba ($m = +\frac{1}{2}$ o $\uparrow$) y abajo ($m = -\frac{1}{2}$ o $\downarrow$), la proyección a lo largo del eje-3, respectivamente. Esta representación es la representación fundamental de la cual se pueden construir el resto de las representaciones.

Combinando representaciones

Un sistema compuesto formado por dos sistemas con momento angular j_A y j_B puede describirse en términos de la base

$$|j_A j_B m_A m_B\rangle \equiv |j_A m_A\rangle |j_B m_B\rangle. \tag{2.1.19}$$

Sin embargo, el operador

$$J = J_A + J_B \tag{2.1.20}$$

también satisface el álgebra de Lie y son los eigenvalores $J(J+1)$ y M de J^2, J_3 los números cuánticos que se conservan. De hecho, el "producto" de dos IRREP de dimensión $2j_A + 1$ y $2j_B + 1$ puede descomponerse como la suma de las IRREP de dimensión $2J + 1$ con

$$J = |j_A - j_B|, |j_A - j_B| + 1, \dots, j_A - j_B \tag{2.1.21}$$

en la base $|j_A j_B J M\rangle$ y

$$M = m_A + m_B. \tag{2.1.22}$$

Esta base puede expresarse en términos de las otras mediante

$$|j_A j_B J M\rangle = \sum_{m_A, m_B} C(m_A m_B; JM)|j_A j_B m_A m_B\rangle \tag{2.1.23}$$

con C los coeficientes de Clebsch-Gordan.

Un ejemplo simple de esta última expresión ocurre al considerar la descripción de un sistema de dos nucleones. Cada nucleón tiene espín $\frac{1}{2}$, por lo que puede tener espín total $S = 1$ o 0 con triplete de espín y singulete, respectivamente.

$$\begin{cases} |S=1, M_S=1\rangle & =\uparrow\uparrow \\ |S=1, M_S=0\rangle & = \sqrt{\frac{1}{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \\ |S=1, M_S=-1\rangle & =\downarrow\downarrow \end{cases} \tag{2.1.24}$$
$$|S=0, M_S=0\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow).$$

Y análogamente, con isospín $I = \frac{1}{2}$ y $I_3 = \pm\frac{1}{2}$ para protones y neutrones, respectivamente. Y con isospín total de $I = 1$ o 0.

$$\begin{cases} |I=1, I_3=1\rangle = pp, \\ |I=1, I_3=0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(pn + np), \\ |I=1, I_3=-1\rangle = nn, \end{cases} \tag{2.1.25}$$
$$|I=0, I_3=0\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(pn - np).$$

Esta descomposición podemos escribirla simbólicamente como

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1 \tag{2.1.26}$$

que se obtiene usando el tamaño del multiplete para identificar a las IRREPS; es decir, a partir del valor máximo y mínimo del espín, 1 y 0, mediante la relación $2S+1$. Esto a su vez puede verse visualmente mediante su diagrama de Young:

$$\ydiagram{1} \otimes \ydiagram{1} = \ydiagram{2} \oplus \ydiagram{1,1}$$

De esto podemos rescatar que tenemos 3 estados simétricos y 1 antisimétrico.

2.1.3. Simetrías locales

Las **simetrías locales de gauge** surgen al promover los parámetros invariantes de una simetría interna a funciones dependientes de las coordenadas del espaciotiempo. En esta sección nos centraremos principalmente en el estudio de una teoría de *gauge* no abeliana. Por lo que el análogo de (2.1.3) es

$$\phi \rightarrow \mathrm{e}^{-i\alpha(x)}\phi, \quad \phi^* \rightarrow \mathrm{e}^{i\alpha(x)}\phi^*. \tag{2.1.27}$$

Para entender la importancia de las simetrías locales, consideramos el rol que juega el número cuántico de color en QCD—la teoría de campo local que describe el sector de la interacción fuerte dentro del SM. QCD es una teoría de *gauge* que exhibe una invarianza exacta bajo transformaciones de *gauge* locales, donde rotaciones unitarias independientes de $SU(3)$ aplicadas a los campos de tres quarks $\psi_n(x)$ en puntos arbitrarios del espaciotiempo dejan invariante la física subyacente.

La forma habitual de distinguir a estos quarks es refiriéndonos a ellos como rojo R, verde G y azul B; pero sin importar a qué quark le asignemos cada uno de estos nombres, los ejes de color pueden ser rotados de una forma arbitraria y local durante la evolución del sistema sin alterar ningún observable físico. A estos observables se les conoce como **invariantes de gauge**. Para el caso del grupo $SU(N)$, los observables definidos a partir de campos fermiónicos en la representación fundamental incluyen operadores compuestos

$$S(x) \equiv \overline{\psi}_n(x)\psi_n(x), \tag{2.1.28}$$

$$J^\mu(x) \equiv \overline{\psi}_n(x)\gamma^\mu\psi_n(x), \tag{2.1.29}$$

$$N(x) \equiv \epsilon_{n_1 n_2 \cdots n_N}\psi_{n_1}(x)\psi_{n_2}(x)\cdots\psi_{n_N}(x). \tag{2.1.30}$$

Se dice que estos campos locales son **incoloros** (*colorless*) o de **color neutro** (*color neutral*), y son los únicos que representan verdaderos observables físicos medibles.

2.2. Simetría Quiral

Para un campo fermiónico ψ podemos definir las proyecciones quirales L (izquierda o levógira) y R (derecha o dextrógira) como

$$\psi_L = P_L\psi = \frac{1-\gamma^5}{2}\psi, \quad \psi_R = P_R\psi = \frac{1+\gamma^5}{2}\psi \tag{2.2.1}$$

que representan grados de libertad independientes, $\psi = \psi_L + \psi_R$. Para un fermión sin masa, las componentes quirales R y L corresponden a partículas con helicidad positiva y negativa, respectivamente; mientras que para antifermiones ocurre lo contrario. Pero, ¿qué es la helicidad? Físicamente, es la proyección del espín en la dirección del momento; matemáticamente, es el signo de la proyección del vector de espín sobre el vector de momento: izquierda si es negativo, derecha si es positivo.

Para visualizar esto, consideremos un sistema que consiste en un tornillo con rosca a la derecha rotando dextrógiramente (a la derecha) o levógiramente (a la izquierda). En el primer caso, el "espín" asociado con la rotación está alineado con el del momento resultando en una helicidad positiva. En el segundo, el espín apunta en la dirección opuesta al momento, por lo que el objeto tiene helicidad negativa (ver figura). Extendiendo esta analogía a los fermiones, podemos decir que un fermión sin masa con una helicidad positiva o negativa puede ser categorizado como *right-* o *left-handed*, respectivamente. Por lo tanto, se puede afirmar que la quiralidad es una propiedad intrínseca de los fermiones sin masa.

La densidad lagrangiana libre de Dirac puede escribirse en términos de las proyecciones quirales como

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}_L i\partial\!\!\!/\psi_L + \overline{\psi}_R i\partial\!\!\!/\psi_R - m(\overline{\psi}_L\psi_R + \overline{\psi}_R\psi_L), \tag{2.2.2}$$

donde $\overline{\psi}_{L,R}$ están definidos por

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_L &\equiv (\psi_L)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger P_L\gamma^0 = \overline{\psi}P_R, \\ \overline{\psi}_R &\equiv (\psi_R)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger P_R\gamma^0 = \overline{\psi}P_L. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

La importancia de las proyecciones quirales radica en que pueden tener diferentes propiedades bajo grupos de simetría globales o locales. Supongamos que los generadores actúan sobre las proyecciones quirales como

$$[T^i, \psi_{aL}] = -L^i_{Lab}\psi_{bL}, \qquad [T^i, \psi_{aR}] = -L^i_{Rab}\psi_{bR}. \tag{2.2.4}$$

Si $L^i_L \neq L^i_R$ la transformación es quiral; de lo contrario, es no quiral. Por ejemplo, las interacciones débiles están asociadas con una simetría de *gauge* quiral, lo cual implica un violación de la paridad. Por otro lado, las interacciones fuertes siguen una simetría de Gauge no quiral, pero poseen simetrías quirales globales aproximadas. Incluso para simetrías quirales, las matrices de representación para los fermiones pueden ser reducibles, de modo que algunos de los fermiones son quirales—sus componentes L y R se transforman de forma distinta y otros son no quirales o vectoriales—se transforman de la misma manera. La corriente de Noether para una simetría quiral es

$$J^i_\mu = \overline{\psi}_{aL}\gamma_\mu (L^i_L)_{ab}\psi_{bL} + \overline{\psi}_{aR}\gamma_\mu (L^i_R)_{ab}\psi_{bR}. \tag{2.2.5}$$

Bajo transformaciones globales

$$\psi_L \to \mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L}\psi_L, \quad \psi_R \to \mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R}\psi_R, \quad \psi \to \mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\left[\vec{L}_L P_L + \vec{L}_R P_R\right]}\psi \tag{2.2.6}$$

es fácil probar que la densidad Lagrangiana para el fermión libre $\mathcal{L}$ es invariante bajo la simetría quiral, escribiéndose como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \overline{\psi}_a i\partial\!\!\!/ \psi_a - \overline{\psi}_a m_{ab}\psi_b, \\ &= \overline{\psi}_{aL} i\partial\!\!\!/ \psi_{aL} + \overline{\psi}_{aR} i\partial\!\!\!/ \psi_{aR} - \overline{\psi}_{aL} m_{ab}\psi_{bR} - \overline{\psi}_{aR} m_{ab}\psi_{bL}.\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

De tal forma que el Lagrangiano transformado queda como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' = \overline{\psi}_{aL}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L} i\partial\!\!\!/ \mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L}\psi_{aL} + \overline{\psi}_{aR}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R} i\partial\!\!\!/ \mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R}\psi_{aR} \\ - \overline{\psi}_{aL}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L} m_{ab}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R}\psi_{bR} - \overline{\psi}_{aR}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R} m_{ab}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L}\psi_{bL}.\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

El hecho de que $U(1)_L$ y $U(1)_R$ sean simetrías globales (constantes en todo el espaciotiempo) implica que las exponenciales conmutan con la derivada, por lo que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \overline{\psi}_{aL}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L} i\partial\!\!\!/ \psi_{aL} + \overline{\psi}_{aR}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R} i\partial\!\!\!/ \psi_{aR} \\ &\quad - \overline{\psi}_{aL}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L} m_{ab}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R}\psi_{bR} - \overline{\psi}_{aR}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R} m_{ab}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L}\psi_{bL}, \\ &= \overline{\psi}_{aL} i\partial\!\!\!/ \psi_{aL} + \overline{\psi}_{aR} i\partial\!\!\!/ \psi_{aR} - \overline{\psi}_{aL}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L} m_{ab}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R}\psi_{bR} - \overline{\psi}_{aR}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R} m_{ab}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L}\psi_{bL}.\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Para que se cumpla la invarianza $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$, se deben satisfacer

$$\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L} m_{ab}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R} = m_{ab} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R} m_{ab}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L} = m_{ab}, \tag{2.2.10}$$

lo cual ocurre de forma general cuando $m_{ab} = 0$. Es decir, los fermiones sin masa poseen una helicidad y quiralidad definidas, lo que da lugar a una constante de movimiento. Por el contrario, para fermiones masivos no es posible desacoplar las componentes levógira y dextrógira en el término de masa, ya que este mezcla ambas componentes, impidiendo que la quiralidad sea una cantidad conservada. Dicho de otra forma, en presencia de fermiones masivos, la simetría quiral se rompe explícitamente.

Capítulo 3

Rompimiento Espontáneo de Simetría

Las simetrías $SU(2), SU(3)$, etc., son manifestaciones de la degeneración de masa de los quarks $m_u = m_d$. Resulta que la razón de tener cantidades similares no se debe a que los quarks tengas masas exactamente iguales, sino a que son muy ligeros respecto a la típica escala de energía de la interacción fuerte (Λ_{QCD}). Por lo tanto, el límite de la simetría exacta requeriría $m_u = m_d = 0$, correspondiendo a las simetrías de sabor quiral $SU(2)_L \times SU(2)_R$; sin embargo, en la naturaleza no observamos ningún patrón de degeneración asociado a esta simetría. La respuesta a esta paradoja radica en que el vacío físico no es invariante (no es un singulete) bajo simetrías quirales, por lo que la simetría se rompe espontáneamente. La manifestación física de esta ruptura de simetría es la aparición de un conjunto de bosones pseudo-Goldstone: los tres piones, así como todo el octeto de mesones pseudoescalares 0^-.

3.1. Mecanismo general

Las simetrías del Lagrangiano pueden romperse **explícitamente** mediante pequeños términos adicionales (como las masas de los quarks), o **espontáneamente** cuando el estado base del sistema no comparte la simetría. La aparición de partículas sin masa es una consecuencia de la degeneración del vacío asociada a la ruptura de una simetría continua global exacta.

La física del rompimiento espontáneo de simetría (SSB) es en esencia física a larga distancia: los fenómenos esenciales aparecen en el límite en el cual el volumen del sistema tiende a infinito.

Para entender el mecanismo SSB supongamos que ϕ_i son un conjunto de campos (compuestos) que se transforman de manera no trivial bajo algún grupo de simetría global G:

$$\phi_i' = D_{ij}(\varepsilon)\phi_j = (\mathrm{e}^{i\varepsilon_a \mathrm{t}_a})_{ij}\phi_j = \phi_i + \delta\phi_i, \tag{3.1.1}$$

donde ε_a son los parámetros del grupo, t_a son los generadores del álgebra de Lie de G en la representación a la que pertenecen los ϕ_i y $D(\varepsilon)$ son las matrices de representación.

La versión en QFT de esta relación es

$$\mathrm{e}^{i\varepsilon_a Q_a}\phi_i \mathrm{e}^{-i\varepsilon_a Q_a} = D_{ij}^{-1}(\varepsilon)\phi_j, \tag{3.1.2}$$

donde los operadores de carga Q_a forman una representación del álgebra en el espacio de estados. Expandiendo las exponenciales en ambos lados, obtenemos que para cada parámetro ε_a

$$[Q_a, \phi_i] = (-\mathsf{t}_a)_{ij}\phi_j. \tag{3.1.3}$$

Si el grupo de simetría deja al vacío invariante, $\mathrm{e}^{i\varepsilon_a Q_a}|0\rangle = |0\rangle$, lo cual implica que todos los generadores aniquilan al vacío. Dado que los campos se transforman de manera no trivial ($D^{-1}(\varepsilon) \neq \mathbb{1},\ \forall \varepsilon_a$), el valor esperado en el vacío (VEV, *Vacuum Expectation Value*) debe anularse:

$$Q_a|0\rangle = 0 \implies \langle 0|\phi_i|0\rangle = 0. \tag{3.1.4}$$

Esta es la realización de simetría de Wigner-Weyl, que es otra manera de decir que la simetría no se rompe. Por el contrario, si un operador no es invariante bajo el grupo G y su VEV cumple que $\langle 0|\phi_i|0\rangle \neq 0$, la simetría se rompe espontáneamente. Esta es la realización de Nambu-Goldstone, donde encontramos que

$$\langle 0|[Q_a, \phi_i]|0\rangle = -(\mathsf{t}_a)_{ij}\langle 0|\phi_i|0\rangle \neq 0. \tag{3.1.5}$$

Por lo que podemos concluir que las cargas no aniquilan el vacío: $Q_a|0\rangle \neq 0$. No obstante, como las cargas se conservan, estas conmutan con el Hamiltoniano $[H, Q] = 0$, lo que da lugar a una degeneración energética del vacío:

$$Q_a|0\rangle = |\eta\rangle \neq 0, \quad H|0\rangle = 0 \implies H|\eta\rangle = HQ_a|0\rangle = Q_a H|0\rangle = 0. \tag{3.1.6}$$

Calculemos la norma de $|\eta\rangle$

$$\langle \eta|\eta\rangle = \langle 0|Q_a^2|0\rangle = \int \mathrm{d}^3x\ \langle 0|j^0(\boldsymbol{x})Q|0\rangle \tag{3.1.7}$$

y apelando a la invarianza traslacional, esto resulta en

$$\int \mathrm{d}^3x\ \langle 0|j^0(0)Q|0\rangle = \infty. \tag{3.1.8}$$

Uno de los resultados más importantes encontrados por Goldstone es la aparición de partículas sin masa cuando una simetría global se rompe. Estos estados son generados por operadores que rotan el vacío original una cantidad infinitesimal hacia un vacío degenerado, proceso que no requiere energía. Para probar el **teorema de Goldstone** usamos la relación de completez $\sum_\lambda \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{2E_p}|\lambda\rangle\langle\lambda|$ en (3.1.5), tal que

$$\langle 0|[Q_a, \phi_i]|0\rangle = \int \mathrm{d}^3x\ \langle 0|[j_a^0(x), \phi(0)]|0\rangle,$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \mathrm{d}^3x\, (\langle 0|j_a^0(x)\phi(0)|0\rangle - \langle 0|\phi(0)j_a^0(x)|0\rangle), \\
&= \sum_\lambda \int \frac{\mathrm{d}^3p}{2E_p}\frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3x\, (\langle 0|j_a^0(x)|\lambda\rangle\langle\lambda|\phi(0)|0\rangle - \langle 0|\phi(0)|\lambda\rangle\langle\lambda|j_a^0(x)|0\rangle). \quad (3.1.9)
\end{aligned}
$$

Por la invarianza traslacional factorizamos las fases $\mathrm{e}^{\pm ipx}$

$$
\langle 0|\phi(x)|\lambda\rangle = \langle 0|\phi(0)|\lambda\rangle\mathrm{e}^{-ip\cdot x}, \quad \langle\lambda|\phi(x)|0\rangle = \langle 0|\phi(0)|\lambda\rangle^*\mathrm{e}^{ip\cdot x}. \tag{3.1.10}
$$

y la definición

$$
\langle 0|j_a^0|\lambda\rangle\langle\lambda|\phi(0)|0\rangle = iR_{a\lambda}(\boldsymbol{p}) \tag{3.1.11}
$$

tenemos que (3.1.9) queda como

$$
\begin{aligned}
\langle 0|[Q_a,\phi_i]|0\rangle &= \sum_\lambda \int \frac{\mathrm{d}^3p}{2E_p}\frac{i}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3x\, (R_{a\lambda}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-ipx} + R_{a\lambda}^*(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{ipx}), \\
&= \sum_\lambda \int \frac{\mathrm{d}^3p}{2E_p}\frac{i}{(2\pi)^3}((2\pi)^3R_{a\lambda}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-i(E_px_0-p\cdot x)}\delta(\boldsymbol{p}-0) \\
&\qquad + (2\pi)^3R_{a\lambda}^*(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{i(E_px_0-p\cdot x)}\delta(\boldsymbol{p}-0)).
\end{aligned} \tag{3.1.12}
$$

Y la función δ implica que la relación de dispersión se vea como

$$
p_0 = E_p = \sqrt{p^2+m_\lambda^2} \implies p_0 = E_p = m_\lambda, \tag{3.1.13}
$$

de modo que (3.1.12) se reduce a

$$
\begin{aligned}
\langle 0|[Q_a,\phi_i]|0\rangle &= \sum_\lambda \frac{i}{2m_\lambda}(R_{a\lambda}(0)\mathrm{e}^{-im_\lambda x_0} + R_{a\lambda}^*(0)\mathrm{e}^{im_\lambda x_0}), \\
&= \sum_\lambda \frac{i}{m_\lambda}\,\mathrm{Re}\big\{R_{a\lambda}(0)\mathrm{e}^{-m_\lambda x_0}\big\} \overset{!}{=} \text{constant}.
\end{aligned} \tag{3.1.14}
$$

Por la invarianza traslacional, el VEV $\langle 0|\phi_j(x)|0\rangle = \langle 0|\phi_j(0)|0\rangle$ en el lado derecho de (3.1.14) también debe ser independiente de x_0, mientras que el lado izquierdo sigue dependiendo de esta debido a la exponencial. Por consiguiente, para que el VEV sea diferente de cero, esta condición se puede satisfacer únicamente si un estado $|\lambda\rangle$ tal que

$$
m_\lambda = 0 \quad \text{y} \quad \frac{R_{a\lambda}(0)}{m_\lambda} \neq 0. \tag{3.1.15}
$$

Por lo tanto, por cada generador que no aniquila al vacío, existe un **bosón de Goldstone sin masa** con una superposición no nula con el vacío, dictada por $\langle 0|j_a^0(0)|\lambda\rangle$ y $\langle 0|\phi(0)|\lambda\rangle$; los modos restantes con $m_\lambda \neq 0$ deben cumplir $R_{a\lambda}(0) = 0$.

3.2. Rompimiento Espontáneo de Simetría Quiral

Una particularidad del teorema de Goldstone es que no explica la dinámica subyacente que genera un VEV diferente de cero; únicamente establece que si existe, deben aparecer partículas sin masa en el espectro. Por lo tanto, el primer paso es identificar los candidatos potenciales a condensados del vacío responsables de la ruptura espontánea de lasimetría quiral ($S\chi SB$, *Spontaneous Chiral Symmetry Breaking*). A partir de (3.1.11) es claro que el "campo" $\phi(0)$ debe representarse mediante un operador compuesto, ya que solo estos pueden tener una superposición no nula con los estados hadrónicos. Si contraemos el propagador de quarks

$$S_{\alpha\beta}(x-y) = \langle 0|\mathsf{T}\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(y)|0\rangle, \tag{3.2.1}$$

con las matrices de Dirac $\Gamma \in \{\gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5, \mathbb{1}, i\gamma_5\}$ (que transforman como vectores, vectores axiales, escalares o pseudoescalares, respectivamente) y las matrices de sabor $\{\mathsf{t}_a, 1\}$, obtenemos los valores esperados en el vacío para las siguientes corrientes (bilineales de quarks):

$$j_a^\Gamma(x) := \overline{\psi}(x)\Gamma\mathsf{t}_a\psi(x), \quad j^\Gamma(x) := \overline{\psi}(x)\Gamma\psi(x). \tag{3.2.2}$$

tal que

$$-\Gamma_{\beta\alpha}\mathsf{t}_a S_{\alpha\beta}(0) = \langle 0|j_a^\Gamma(0)|0\rangle. \tag{3.2.3}$$

Debido a la invarianza traslacional, estos valores no pueden depender de x y deben ser constantes con dimensiones de masa. Por invarianza de Lorentz y conservación de la paridad del vacío, todos estos valores esperados deben anularse, siendo la única excepción los condensados escalares que comparten los números cuánticos del vacío (0^{++}):

$$\begin{aligned} \langle 0|\tilde{S}_a(0)|0\rangle &= \langle 0|\overline{\psi}(0)\mathsf{t}_a\psi(0)|0\rangle, \\ \langle 0|\tilde{S}(0)|0\rangle &= \langle 0|\overline{\psi}(0)\psi(0)|0\rangle =: \langle\overline{\psi}\psi\rangle. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

La tilde únicamente es una ayuda visual para diferenciarlo del propagador de quarks. Estrictamente hablando, si la simetría de sabor $SU(N_f)$ fuera exacta, las diferencias entre los condensados de distintos sabores desaparecerían. De las relaciones de conmutación para tiempos iguales

$$\begin{aligned}
\left[j_a^{\Gamma}(x), j_b^{\Gamma'}(y)\right]_{x^0=y^0} &= \left[if_{abc}j_c^{\Gamma_+}(x) + d_{abc}j_c^{\Gamma_-}(x) + \frac{\delta_{ab}}{N}j^{\Gamma_-}(x)\right]\delta^{(3)}(x-y), \\
\left[j_a^{\Gamma}(x), j^{\Gamma'}(y)\right]_{x^0=y^0} &= 2j_a^{\Gamma_-}(x)\delta^{(3)}(x-y)
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

con $\Gamma_\pm = \frac{1}{2}(\Gamma\gamma^0\Gamma' \pm \Gamma'\gamma^0\Gamma)$, se puede derivar la relación:

$$[Q_a^V, \tilde{S}_b(x)] = if_{abc}\tilde{S}_c(x), \tag{3.2.6}$$

y como la simetría $SU(N_f)_V$ no está rota espontáneamente $Q_a^V|0\rangle = 0$, el VEV de este conmutador se anula. En consecuencia, el condensado escalar es idéntico para todos lo sabores:

$$\langle 0|\tilde{S}_a(0)|0\rangle = 0 \implies \langle \overline{u}u\rangle - \langle \overline{d}d\rangle = 0, \quad \langle \overline{u}u\rangle + \langle \overline{d}d\rangle - 2\langle \overline{s}s\rangle = 0, \tag{3.2.7}$$

lo que implica $\langle \overline{u}u\rangle = \langle \overline{d}d\rangle = \langle \overline{s}s\rangle = \langle \overline{\psi}\psi\rangle/3$. En conclusión, son los valores esperados de los bilineales escalares de quarks los responsables de la ruptura espontánea de la simetría quiral; es decir, representan el parámetro de orden de dicha transición.

Bibliografía

[1] Ta-Pei Cheng y Ling-Fong Li. *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. Oxford, UK: Oxford University Press, 1984. ISBN: 978-0-19-851961-4, 978-0-19-851961-4.

[2] Anthony Duncan. *The Conceptual Framework of Quantum Field Theory*. Oxford University Press, ago. de 2012. ISBN: 9780199573264. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780199573264.001.0001.

[3] Gernot Eichmann. *Spontaneous chiral symmetry breaking*. 2020. URL: http://cftp.ist.utl.pt/~gernot.eichmann/2020-QCDHP/QCD-SCSB.pdf.

[4] B.C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2003. ISBN: 9780387401225.

[5] F. Halzen y Alan D. Martin. *Quarks And Leptons: An Introductory Course In Modern Particle Physics*. 1984. ISBN: 978-0-471-88741-6.

[6] Stephen. Haywood. *Symmetries and conservation laws in particle physics : an introduction to group theory for particle physicists*. eng. London: Imperial College Press, 2011. ISBN: 1848166591.

[7] Claude Itzykson y Jean-Bernard Zuber. *Quantum field theory*. Courier Corporation, 2006.

[8] Paul Langacker. *The Standard Model and Beyond*. Taylor & Francis, 2017. ISBN: 978-1-4987-6322-6, 978-1-4987-6321-9, 978-0-367-57344-7, 978-1-315-17062-6. DOI: 10.1201/b22175.

[9] Alexey Nefediev. "Chiral symmetry and its breaking". En: *Reference Module in Materials Science and Materials Engineering*. Elsevier, 2026. ISBN: 9780128035818. DOI: 10.1016/b978-0-443-26598-3.00086-9.

[10] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2013.