

---

## Rompimiento Espontáneo de Simetría

---

Las simetrías  $SU(2)$ ,  $SU(3)$ , etc., son manifestaciones de la degeneración de masa de los quarks  $m_u = m_d$ . Resulta que la razón de tener cantidades similares no se debe a que los quarks tengan masas exactamente iguales, sino a que son muy ligeros respecto a la típica escala de energía de la interacción fuerte ( $\Lambda_{QCD}$ ). Por lo tanto, el límite de la simetría exacta requeriría  $m_u = m_d = 0$ , correspondiendo a las simetrías de sabor quirial  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ ; sin embargo, en la naturaleza no observamos ningún patrón de degeneración asociado a esta simetría. La respuesta a esta paradoja radica en que el vacío físico no es invariante (no es un singulete) bajo simetrías quirales, por lo que la simetría se rompe espontáneamente. La manifestación física de esta ruptura de simetría es la aparición de un conjunto de bosones pseudo-Goldstone: los tres piones, así como todo el octeto de mesones pseudoescalares  $0^-$ .

### 3.1. Mecanismo general

Las simetrías del Lagrangiano pueden romperse **explícitamente** mediante pequeños términos adicionales (como las masas de los quarks), o **espontáneamente** cuando el estado base del sistema no comparte la simetría. La aparición de partículas sin masa es una consecuencia de la degeneración del vacío asociada a la ruptura de una simetría continua global exacta.

La física del rompimiento espontáneo de simetría (SSB) es en esencia física a larga distancia: los fenómenos esenciales aparecen en el límite en el cual el volumen del sistema tiende a infinito.

Para entender el mecanismo SSB supongamos que  $\phi_i$  son un conjunto de campos (compuestos) que se transforman de manera no trivial bajo algún grupo de simetría global  $G$ :

$$\phi'_i = D_{ij}(\varepsilon)\phi_j = (e^{i\varepsilon_a t_a})_{ij}\phi_j = \phi_i + \delta\phi_i, \quad (3.1.1)$$

donde  $\varepsilon_a$  son los parámetros del grupo,  $t_a$  son los generadores del álgebra de Lie de  $G$  en la representación a la que pertenecen los  $\phi_i$  y  $D(\varepsilon)$  son las matrices de representación.

La versión en QFT de esta relación es

$$e^{i\varepsilon_a Q_a}\phi_i e^{-i\varepsilon_a Q_a} = D_{ij}^{-1}(\varepsilon)\phi_j, \quad (3.1.2)$$

donde los operadores de carga  $Q_a$  forman una representación del álgebra en el espacio de estados. Expandiendo las exponenciales en ambos lados, obtenemos que para cada parámetro  $\varepsilon_a$

$$[Q_a, \phi_i] = (-t_a)_{ij} \phi_j. \quad (3.1.3)$$

Si el grupo de simetría deja al vacío invariante,  $e^{i\varepsilon_a Q_a} |0\rangle = |0\rangle$ , lo cual implica que todos los generadores aniquilan al vacío. Dado que los campos se transforman de manera no trivial ( $D^{-1}(\varepsilon) \neq \mathbb{1}$ ,  $\forall \varepsilon_a$ ), el valor esperado en el vacío (VEV, *Vacuum Expectation Value*) debe anularse:

$$Q_a |0\rangle = 0 \implies \langle 0 | \phi_i | 0 \rangle = 0. \quad (3.1.4)$$

Esta es la realización de simetría de Wigner-Weyl, que es otra manera de decir que la simetría no se rompe. Por el contrario, si un operador no es invariante bajo el grupo  $G$  y su VEV cumple que  $\langle 0 | \phi_i | 0 \rangle \neq 0$ , la simetría se rompe espontáneamente. Esta es la realización de Nambu-Goldstone, donde encontramos que

$$\langle 0 | [Q_a, \phi_i] | 0 \rangle = -(t_a)_{ij} \langle 0 | \phi_j | 0 \rangle \neq 0. \quad (3.1.5)$$

Por lo que podemos concluir que las cargas no aniquilan el vacío:  $Q_a |0\rangle \neq 0$ . No obstante, como las cargas se conservan, estas conmutan con el Hamiltoniano  $[H, Q] = 0$ , lo que da lugar a una degeneración energética del vacío:

$$Q_a |0\rangle = |\eta\rangle \neq 0, \quad H |0\rangle = 0 \implies H |\eta\rangle = H Q_a |0\rangle = Q_a H |0\rangle = 0. \quad (3.1.6)$$

Calculemos la norma de  $|\eta\rangle$

$$\langle \eta | \eta \rangle = \langle 0 | Q_a^2 | 0 \rangle = \int d^3x \langle 0 | j^0(\mathbf{x}) Q | 0 \rangle \quad (3.1.7)$$

y apelando a la invarianza traslacional, esto resulta en

$$\int d^3x \langle 0 | j^0(0) Q | 0 \rangle = \infty. \quad (3.1.8)$$

Uno de los resultados más importantes encontrados por Goldstone es la aparición de partículas sin masa cuando una simetría global se rompe. Estos estados son generados por operadores que rotan el vacío original una cantidad infinitesimal hacia un vacío degenerado, proceso que no requiere energía. Para probar el **teorema de Goldstone** usamos la relación de completitud  $\sum_\lambda \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_p} |\lambda\rangle \langle \lambda|$  en (3.1.5), tal que

$$\langle 0 | [Q_a, \phi_i] | 0 \rangle = \int d^3x \langle 0 | [j_a^0(x), \phi(0)] | 0 \rangle,$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^3x (\langle 0 | j_a^0(x) \phi(0) | 0 \rangle - \langle 0 | \phi(0) j_a^0(x) | 0 \rangle), \\
&= \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{2E_p} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x (\langle 0 | j_a^0(x) | \lambda \rangle \langle \lambda | \phi(0) | 0 \rangle - \langle 0 | \phi(0) | \lambda \rangle \langle \lambda | j_a^0(x) | 0 \rangle). \quad (3.1.9)
\end{aligned}$$

Por la invarianza traslacional factorizamos las fases  $e^{\pm ipx}$

$$\langle 0 | \phi(x) | \lambda \rangle = \langle 0 | \phi(0) | \lambda \rangle e^{-ip \cdot x}, \quad \langle \lambda | \phi(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(0) | \lambda \rangle^* e^{ip \cdot x}. \quad (3.1.10)$$

y la definición

$$\langle 0 | j_a^0 | \lambda \rangle \langle \lambda | \phi(0) | 0 \rangle = i R_{a\lambda}(\mathbf{p}) \quad (3.1.11)$$

tenemos que (3.1.9) queda como

$$\begin{aligned}
\langle 0 | [Q_a, \phi_i] | 0 \rangle &= \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{2E_p} \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3x (R_{a\lambda}(\mathbf{p}) e^{-ipx} + R_{a\lambda}^*(\mathbf{p}) e^{ipx}), \\
&= \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{2E_p} \frac{i}{(2\pi)^3} ((2\pi)^3 R_{a\lambda}(\mathbf{p}) e^{-i(E_p x_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \delta(\mathbf{p} - 0) \\
&\quad + (2\pi)^3 R_{a\lambda}^*(\mathbf{p}) e^{i(E_p x_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \delta(\mathbf{p} - 0)). \quad (3.1.12)
\end{aligned}$$

Y la función  $\delta$  implica que la relación de dispersión se vea como

$$p_0 = E_p = \sqrt{p^2 + m_{\lambda}^2} \implies p_0 = E_p = m_{\lambda}, \quad (3.1.13)$$

de modo que (3.1.12) se reduce a

$$\begin{aligned}
\langle 0 | [Q_a, \phi_i] | 0 \rangle &= \sum_{\lambda} \frac{i}{2m_{\lambda}} (R_{a\lambda}(0) e^{-im_{\lambda} x_0} + R_{a\lambda}^*(0) e^{im_{\lambda} x_0}), \\
&= \sum_{\lambda} \frac{i}{m_{\lambda}} \operatorname{Re}\{R_{a\lambda}(0) e^{-m_{\lambda} x_0}\} \stackrel{!}{=} \text{constant}. \quad (3.1.14)
\end{aligned}$$

Por la invarianza traslacional, el VEV  $\langle 0 | \phi_j(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi_j(0) | 0 \rangle$  en el lado derecho de (3.1.14) también debe ser independiente de  $x_0$ , mientras que el lado izquierdo sigue dependiendo de esta debido a la exponencial. Por consiguiente, para que el VEV sea diferente de cero, esta condición se puede satisfacer únicamente si un estado  $|\lambda\rangle$  tal que

$$m_{\lambda} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{R_{a\lambda}(0)}{m_{\lambda}} \neq 0. \quad (3.1.15)$$

Por lo tanto, por cada generador que no aniquila al vacío, existe un **bosón de Goldstone sin masa** con una superposición no nula con el vacío, dictada por  $\langle 0 | j_a^0(0) | \lambda \rangle$  y  $\langle 0 | \phi(0) | \lambda \rangle$ ; los modos restantes con  $m_\lambda \neq 0$  deben cumplir  $R_{a\lambda}(0) = 0$ .

### 3.2. Rompimiento Espontáneo de Simetría Quiral

Una particularidad del teorema de Goldstone es que no explica la dinámica subyacente que genera un VEV diferente de cero; únicamente establece que si existe, deben aparecer partículas sin masa en el espectro. Por lo tanto, el primer paso es identificar los candidatos potenciales a condensados del vacío responsables de la ruptura espontánea de lasimetría quiral ( $S_\chi SB$ , *Spontaneous Chiral Symmetry Breaking*). A partir de ?? es claro que el “campo”  $\phi(0)$  debe representarse mediante un operador compuesto, ya que solo estos pueden tener una superposición no nula con los estados hadrónicos. Si contraemos el propagador de quarks

$$S_{\alpha\beta}(x-y) = \langle 0 | \tau \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle, \quad (3.2.1)$$

con las matrices de Dirac  $\Gamma \in \{\gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5, \mathbb{1}, i\gamma_5\}$  (que transforman como vectores, vectores axiales, escalares o pseudoescalares, respectivamente) y las matrices de sabor  $\{\mathbf{t}_a, 1\}$ , obtenemos los valores esperados en el vacío para las siguientes corrientes (bilineales de quarks):

$$j_a^\Gamma(x) := \bar{\psi}(x) \Gamma \mathbf{t}_a \psi(x), \quad j^\Gamma(x) := \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x). \quad (3.2.2)$$

tal que

$$-\Gamma_{\beta\alpha} \mathbf{t}_a S_{\alpha\beta}(0) = \langle 0 | j_a^\Gamma(0) | 0 \rangle. \quad (3.2.3)$$

Debido a la invarianza traslacional, estos valores no pueden depender de  $x$  y deben ser constantes con dimensiones de masa. Por invarianza de Lorentz y conservación de la paridad del vacío, todos estos valores esperados deben anularse, siendo la única excepción los condensados escalares que comparten los números cuánticos del vacío ( $0^{++}$ ):

$$\begin{aligned} \langle 0 | \tilde{S}_a(0) | 0 \rangle &= \langle 0 | \bar{\psi}(0) \mathbf{t}_a \psi(0) | 0 \rangle, \\ \langle 0 | \tilde{S}(0) | 0 \rangle &= \langle 0 | \bar{\psi}(0) \psi(0) | 0 \rangle =: \langle \bar{\psi} \psi \rangle. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

La tilde únicamente es una ayuda visual para diferenciarlo del propagador de quarks. Estrictamente hablando, si la simetría de sabor  $SU(N_f)$  fuera exacta, las diferencias entre los condensados de distintos sabores desaparecerían. De las relaciones de conmutación para tiempos iguales

$$\begin{aligned}
[j_a^\Gamma(x), j_b^{\Gamma'}(y)]_{x^0=y^0} &= [if_{abc}j_c^{\Gamma^+}(x) + d_{abc}j_c^{\Gamma^-}(x) + \frac{\delta_{ab}}{N}j^{\Gamma^-}(x)]\delta^{(3)}(x-y), \\
[j_a^\Gamma(x), j^{\Gamma'}(y)]_{x^0=y^0} &= 2j_a^{\Gamma^-}(x)\delta^{(3)}(x-y)
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

con  $\Gamma_\pm = \frac{1}{2}(\Gamma\gamma^0\Gamma' \pm \Gamma'\gamma^0\Gamma)$ , se puede derivar la relación:

$$[Q_a^V, \tilde{S}_b(x)] = if_{abc}\tilde{S}_c(x), \tag{3.2.6}$$

y como la simetría  $SU(N_f)_V$  no está rota espontáneamente  $Q_a^V|0\rangle = 0$ , el VEV de este conmutador se anula. En consecuencia, el condensado escalar es idéntico para todos los sabores:

$$\langle 0|\tilde{S}_a(0)|0\rangle = 0 \implies \langle \bar{u}u \rangle - \langle \bar{d}d \rangle = 0, \quad \langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle - 2\langle \bar{s}s \rangle = 0, \tag{3.2.7}$$

lo que implica  $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle = \langle \bar{s}s \rangle = \langle \bar{\psi}\psi \rangle/3$ . En conclusión, son los valores esperados de los bilineales escalares de quarks los responsables de la ruptura espontánea de la simetría quiral; es decir, representan el parámetro de orden de dicha transición.