3.2. Rompimiento Espontáneo de Simetría Quiral

Una particularidad del teorema de Goldstone es que no explica la dinámica subyacente que genera un VEV diferente de cero; únicamente establece que si existe, deben aparecer partículas sin masa en el espectro. Por lo tanto, el primer paso es identificar los candidatos potenciales a condensados del vacío responsables de la ruptura espontánea de lasimetría quiral ($S\chi SB$, *Spontaneous Chiral Symmetry Breaking*). A partir de (3.1.11) es claro que el "campo" $\phi(0)$ debe representarse mediante un operador compuesto, ya que solo estos pueden tener una superposición no nula con los estados hadrónicos. Si contraemos el propagador de quarks

$$S_{\alpha\beta}(x-y) = \langle 0|\mathsf{T}\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(y)|0\rangle, \tag{3.2.1}$$

con las matrices de Dirac $\Gamma \in \{\gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5, \mathbb{1}, i\gamma_5\}$ (que transforman como vectores, vectores axiales, escalares o pseudoescalares, respectivamente) y las matrices de sabor $\{\mathsf{t}_a, 1\}$, obtenemos los valores esperados en el vacío para las siguientes corrientes (bilineales de quarks):

$$j_a^\Gamma(x) := \overline{\psi}(x)\Gamma\mathsf{t}_a\psi(x), \quad j^\Gamma(x) := \overline{\psi}(x)\Gamma\psi(x). \tag{3.2.2}$$

tal que

$$-\Gamma_{\beta\alpha}\mathsf{t}_a S_{\alpha\beta}(0) = \langle 0|j_a^\Gamma(0)|0\rangle. \tag{3.2.3}$$

Debido a la invarianza traslacional, estos valores no pueden depender de x y deben ser constantes con dimensiones de masa. Por invarianza de Lorentz y conservación de la paridad del vacío, todos estos valores esperados deben anularse, siendo la única excepción los condensados escalares que comparten los números cuánticos del vacío (0^{++}):

$$\begin{aligned} \langle 0|\tilde{S}_a(0)|0\rangle &= \langle 0|\overline{\psi}(0)\mathsf{t}_a\psi(0)|0\rangle, \\ \langle 0|\tilde{S}(0)|0\rangle &= \langle 0|\overline{\psi}(0)\psi(0)|0\rangle =: \langle\overline{\psi}\psi\rangle. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

La tilde únicamente es una ayuda visual para diferenciarlo del propagador de quarks. Estrictamente hablando, si la simetría de sabor $SU(N_f)$ fuera exacta, las diferencias entre los condensados de distintos sabores desaparecerían. De las relaciones de conmutación para tiempos iguales

$$\begin{aligned} [j_a^\Gamma(x), j_b^{\Gamma'}(y)]_{x^0=y^0} &= [if_{abc}j_c^{\Gamma_+}(x) + d_{abc}j_c^{\Gamma_-}(x) + \frac{\delta_{ab}}{N}j^{\Gamma_-}(x)]\delta^{(3)}(x-y), \\ [j_a^\Gamma(x), j^{\Gamma'}(y)]_{x^0=y^0} &= 2j_a^{\Gamma_-}(x)\delta^{(3)}(x-y) \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

con $\Gamma_{\pm} = \frac{1}{2}(\Gamma\gamma^0\Gamma' \pm \Gamma'\gamma^0\Gamma)$, se puede derivar la relación:

$$[Q_a^V, \tilde{S}_b(x)] = if_{abc}\tilde{S}_c(x), \tag{3.2.6}$$

y como la simetría $SU(N_f)_V$ no está rota espontáneamente $Q_a^V|0\rangle = 0$, el VEV de este conmutador se anula. En consecuencia, el condensado escalar es idéntico para todos lo sabores:

$$\langle 0|\tilde{S}_a(0)|0\rangle = 0 \implies \langle \overline{u}u\rangle - \langle \overline{d}d\rangle = 0, \quad \langle \overline{u}u\rangle + \langle \overline{d}d\rangle - 2\langle \overline{s}s\rangle = 0, \tag{3.2.7}$$

lo que implica $\langle \overline{u}u\rangle = \langle \overline{d}d\rangle = \langle \overline{s}s\rangle = \langle \overline{\psi}\psi\rangle/3$. En conclusión, son los valores esperados de los bilineales escalares de quarks los responsables de la ruptura espontánea de la simetría quiral; es decir, representan el parámetro de orden de dicha transición.