3.1. Mecanismo general

Las simetrías del Lagrangiano pueden romperse **explícitamente** mediante pequeños términos adicionales (como las masas de los quarks), o **espontáneamente** cuando el estado base del sistema no comparte la simetría. La aparición de partículas sin masa es una consecuencia de la degeneración del vacío asociada a la ruptura de una simetría continua global exacta.

La física del rompimiento espontáneo de simetría (SSB) es en esencia física a larga distancia: los fenómenos esenciales aparecen en el límite en el cual el volumen del sistema tiende a infinito.

Para entender el mecanismo SSB supongamos que ϕ_i son un conjunto de campos (compuestos) que se transforman de manera no trivial bajo algún grupo de simetría global G:

$$\phi_i' = D_{ij}(\varepsilon)\phi_j = (\mathrm{e}^{i\varepsilon_a \mathtt{t}_a})_{ij}\phi_j = \phi_i + \delta\phi_i, \tag{3.1.1}$$

donde ε_a son los parámetros del grupo, $\mathtt{t}_a$ son los generadores del álgebra de Lie de G en la representación a la que pertenecen los ϕ_i y $D(\varepsilon)$ son las matrices de representación.

La versión en QFT de esta relación es

$$\mathrm{e}^{i\varepsilon_a Q_a}\phi_i \mathrm{e}^{-i\varepsilon_a Q_a} = D^{-1}_{ij}(\varepsilon)\phi_j, \tag{3.1.2}$$

donde los operadores de carga Q_a forman una representación del álgebra en el espacio de estados. Expandiendo las exponenciales en ambos lados, obtenemos que para cada parámetro ε_a

$$[Q_a, \phi_i] = (-\mathtt{t}_a)_{ij}\phi_j. \tag{3.1.3}$$

Si el grupo de simetría deja al vacío invariante, $\mathrm{e}^{i\varepsilon_a Q_a}|0\rangle = |0\rangle$, lo cual implica que todos los generadores aniquilan al vacío. Dado que los campos se transforman de manera no trivial ($D^{-1}(\varepsilon) \neq \mathbb{1},\ \forall\varepsilon_a$), el valor esperado en el vacío (VEV, *Vacuum Expectation Value*) debe anularse:

$$Q_a|0\rangle = 0 \implies \langle 0|\phi_i|0\rangle = 0. \tag{3.1.4}$$

Esta es la realización de simetría de Wigner-Weyl, que es otra manera de decir que la simetría no se rompe. Por el contrario, si un operador no es invariante bajo el grupo G y su VEV cumple que $\langle 0|\phi_i|0\rangle \neq 0$, la simetría se rompe espontáneamente. Esta es la realización de Nambu-Goldstone, donde encontramos que

$$\langle 0|[Q_a, \phi_i]|0\rangle = -(\mathtt{t}_a)_{ij}\langle 0|\phi_i|0\rangle \neq 0. \tag{3.1.5}$$

Por lo que podemos concluir que las cargas no aniquilan el vacío: $Q_a|0\rangle \neq 0$. No obstante, como las cargas se conservan, estas conmutan con el Hamiltoniano $[H, Q] = 0$, lo que da lugar a una degeneración energética del vacío:

$$Q_a|0\rangle = |\eta\rangle \neq 0, \quad H|0\rangle = 0 \implies H|\eta\rangle = HQ_a|0\rangle = Q_aH|0\rangle = 0. \tag{3.1.6}$$

Calculemos la norma de $|\eta\rangle$

$$\langle\eta|\eta\rangle = \langle 0|Q_a^2|0\rangle = \int \mathrm{d}^3x\, \langle 0|j^0(\boldsymbol{x})Q|0\rangle \tag{3.1.7}$$

y apelando a la invarianza traslacional, esto resulta en

$$\int \mathrm{d}^3x\, \langle 0|j^0(0)Q|0\rangle = \infty. \tag{3.1.8}$$

Uno de los resultados más importantes encontrados por Goldstone es la aparición de partículas sin masa cuando una simetría global se rompe. Estos estados son generados por operadores que rotan el vacío original una cantidad infinitesimal hacia un vacío degenerado, proceso que no requiere energía. Para probar el **teorema de Goldstone** usamos la relación de completez $\sum_\lambda \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{2E_p}|\lambda\rangle\langle\lambda|$ en (3.1.5), tal que

$$\begin{aligned}
\langle 0|[Q_a, \phi_i]|0\rangle &= \int \mathrm{d}^3x\, \langle 0|[j_a^0(x), \phi(0)]|0\rangle, \\
&= \int \mathrm{d}^3x\, (\langle 0|j_a^0(x)\phi(0)|0\rangle - \langle 0|\phi(0)j_a^0(x)|0\rangle), \\
&= \sum_\lambda \int \frac{\mathrm{d}^3p}{2E_p}\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3x\, (\langle 0|j_a^0(x)|\lambda\rangle\langle\lambda|\phi(0)|0\rangle - \langle 0|\phi(0)|\lambda\rangle\langle\lambda|j_a^0(x)|0\rangle).
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Por la invarianza traslacional factorizamos las fases $\mathrm{e}^{\pm ipx}$

$$\langle 0|\phi(x)|\lambda\rangle = \langle 0|\phi(0)|\lambda\rangle\mathrm{e}^{-ip\cdot x}, \quad \langle\lambda|\phi(x)|0\rangle = \langle 0|\phi(0)|\lambda\rangle^*\mathrm{e}^{ip\cdot x}. \tag{3.1.10}$$

y la definición

$$\langle 0|j_a^0|\lambda\rangle\langle\lambda|\phi(0)|0\rangle = iR_{a\lambda}(\boldsymbol{p}) \tag{3.1.11}$$

tenemos que (3.1.9) queda como

$$\langle 0|[Q_a, \phi_i]|0\rangle = \sum_\lambda \int \frac{\mathrm{d}^3p}{2E_p}\frac{i}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3x\, (R_{a\lambda}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-ipx} + R_{a\lambda}^*(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{ipx}),$$

$$= \sum_{\lambda} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{2E_p} \frac{i}{(2\pi)^3} ((2\pi)^3 R_{a\lambda}(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{-i(E_p x_0 - p \cdot x)} \delta(\boldsymbol{p} - 0) \\ + (2\pi)^3 R^*_{a\lambda}(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{i(E_p x_0 - p \cdot x)} \delta(\boldsymbol{p} - 0)). \tag{3.1.12}$$

Y la función δ implica que la relación de dispersión se vea como

$$p_0 = E_p = \sqrt{p^2 + m_\lambda^2} \implies p_0 = E_p = m_\lambda, \tag{3.1.13}$$

de modo que (3.1.12) se reduce a

$$\langle 0 | [Q_a, \phi_i] | 0 \rangle = \sum_{\lambda} \frac{i}{2m_\lambda} (R_{a\lambda}(0) \mathrm{e}^{-im_\lambda x_0} + R^*_{a\lambda}(0) \mathrm{e}^{im_\lambda x_0}), \\ = \sum_{\lambda} \frac{i}{m_\lambda} \mathrm{Re}\{R_{a\lambda}(0) \mathrm{e}^{-m_\lambda x_0}\} \stackrel{!}{=} \text{constant}. \tag{3.1.14}$$

Por la invarianza traslacional, el VEV $\langle 0 | \phi_j(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi_j(0) | 0 \rangle$ en el lado derecho de (3.1.14) también debe ser independiente de x_0, mientras que el lado izquierdo sigue dependiendo de esta debido a la exponencial. Por consiguiente, para que el VEV sea diferente de cero, esta condición se puede satisfacer únicamente si un estado $|\lambda\rangle$ tal que

$$m_\lambda = 0 \quad \text{y} \quad \frac{R_{a\lambda}(0)}{m_\lambda} \neq 0. \tag{3.1.15}$$

Por lo tanto, por cada generador que no aniquila al vacío, existe un **bosón de Goldstone sin masa** con una superposición no nula con el vacío, dictada por $\langle 0 | j^0_a(0) | \lambda \rangle$ y $\langle 0 | \phi(0) | \lambda \rangle$; los modos restantes con $m_\lambda \neq 0$ deben cumplir $R_{a\lambda}(0) = 0$.