2.2. Simetría Quiral

Para un campo fermiónico ψ podemos definir las proyecciones quirales L (izquierda o levógira) y R (derecha o dextrógira) como

$$\psi_L = P_L\psi = \frac{1-\gamma^5}{2}\psi, \quad \psi_R = P_R\psi = \frac{1+\gamma^5}{2}\psi \tag{2.2.1}$$

que representan grados de libertad independientes, $\psi = \psi_L + \psi_R$. Para un fermión sin masa, las componentes quirales R y L corresponden a partículas con helicidad positiva y negativa, respectivamente; mientras que para antifermiones ocurre lo contrario. Pero, ¿qué es la helicidad? Físicamente, es la proyección del espín en la dirección del momento; matemáticamente, es el signo de la proyección del vector de espín sobre el vector de momento: izquierda si es negativo, derecha si es positivo.

Para visualizar esto, consideremos un sistema que consiste en un tornillo con rosca a la derecha rotando dextrógiramente (a la derecha) o levógiramente (a la izquierda). En el primer caso, el "espín" asociado con la rotación está alineado con el del momento resultando en una helicidad positiva. En el segundo, el espín apunta en la dirección opuesta al momento, por lo que el objeto tiene helicidad negativa (ver figura). Extendiendo esta analogía a los fermiones, podemos decir que un fermión sin masa con una helicidad positiva o negativa puede ser categorizado como *right-* o *left-handed*, respectivamente. Por lo tanto, se puede afirmar que la quiralidad es una propiedad intrínseca de los fermiones sin masa.

La densidad lagrangiana libre de Dirac puede escribirse en términos de las proyecciones quirales como

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}_L i\partial\!\!\!/\psi_L + \overline{\psi}_R i\partial\!\!\!/\psi_R - m(\overline{\psi}_L\psi_R + \overline{\psi}_R\psi_L), \tag{2.2.2}$$

donde $\overline{\psi}_{L,R}$ están definidos por

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_L &\equiv (\psi_L)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger P_L\gamma^0 = \overline{\psi}P_R, \\ \overline{\psi}_R &\equiv (\psi_R)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger P_R\gamma^0 = \overline{\psi}P_L. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

La importancia de las proyecciones quirales radica en que pueden tener diferentes propiedades bajo grupos de simetría globales o locales. Supongamos que los generadores actúan sobre las proyecciones quirales como

$$[T^i, \psi_{aL}] = -L^i_{Lab}\psi_{bL}, \qquad [T^i, \psi_{aR}] = -L^i_{Rab}\psi_{bR}. \tag{2.2.4}$$

Si $L^i_L \neq L^i_R$ la transformación es quiral; de lo contrario, es no quiral. Por ejemplo, las interacciones débiles están asociadas con una simetría de *gauge* quiral, lo cual implica un violación de la paridad. Por otro lado, las interacciones fuertes siguen una simetría de Gauge no quiral, pero poseen simetrías quirales globales aproximadas. Incluso para simetrías quirales, las matrices de representación para los fermiones pueden ser reducibles, de modo que algunos de los fermiones son quirales—sus componentes L y R se transforman de forma distinta y otros son no quirales o vectoriales—se transforman de la misma manera. La corriente de Noether para una simetría quiral es

$$J_\mu^i = \overline{\psi}_{aL}\gamma_\mu(L_L^i)_{ab}\psi_{bL} + \overline{\psi}_{aR}\gamma_\mu(L_R^i)_{ab}\psi_{bR}. \tag{2.2.5}$$

Bajo transformaciones globales

$$\psi_L \to \mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L}\psi_L, \quad \psi_R \to \mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R}\psi_R, \quad \psi \to \mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\left[\vec{L}_L P_L + \vec{L}_R P_R\right]}\psi \tag{2.2.6}$$

es fácil probar que la densidad Lagrangiana para el fermión libre $\mathcal{L}$ es invariante bajo la simetría quiral, escribiéndose como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \overline{\psi}_a i\partial\!\!\!/\psi_a - \overline{\psi}_a m_{ab}\psi_b, \\ &= \overline{\psi}_{aL} i\partial\!\!\!/\psi_{aL} + \overline{\psi}_{aR} i\partial\!\!\!/\psi_{aR} - \overline{\psi}_{aL} m_{ab}\psi_{bR} - \overline{\psi}_{aR} m_{ab}\psi_{bL}. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

De tal forma que el Lagrangiano transformado queda como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = {} & \overline{\psi}_{aL}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L} i\partial\!\!\!/ \mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L}\psi_{aL} + \overline{\psi}_{aR}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R} i\partial\!\!\!/ \mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R}\psi_{aR} \\ & - \overline{\psi}_{aL}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L} m_{ab}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R}\psi_{bR} - \overline{\psi}_{aR}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R} m_{ab}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L}\psi_{bL}. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

El hecho de que $U(1)_L$ y $U(1)_R$ sean simetrías globales (constantes en todo el espaciotiempo) implica que las exponenciales conmutan con la derivada, por lo que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = {} & \overline{\psi}_{aL}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L} i\partial\!\!\!/\psi_{aL} + \overline{\psi}_{aR}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R} i\partial\!\!\!/\psi_{aR} \\ & - \overline{\psi}_{aL}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L} m_{ab}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R}\psi_{bR} - \overline{\psi}_{aR}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R} m_{ab}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L}\psi_{bL}, \\ = {} & \overline{\psi}_{aL} i\partial\!\!\!/\psi_{aL} + \overline{\psi}_{aR} i\partial\!\!\!/\psi_{aR} - \overline{\psi}_{aL}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L} m_{ab}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R}\psi_{bR} - \overline{\psi}_{aR}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R} m_{ab}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L}\psi_{bL}. \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Para que se cumpla la invarianza $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$, se deben satisfacer

$$\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L} m_{ab}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R} = m_{ab} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_R} m_{ab}\mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{L}_L} = m_{ab}, \tag{2.2.10}$$

lo cual ocurre de forma general cuando $m_{ab} = 0$. Es decir, los fermiones sin masa poseen una helicidad y quiralidad definidas, lo que da lugar a una constante de movimiento. Por el contrario, para fermiones masivos no es posible desacoplar las componentes levógira y dextrógira en el término de masa, ya que este mezcla ambas componentes, impidiendo que la quiralidad sea una cantidad conservada. Dicho de otra forma, en presencia de fermiones masivos, la simetría quiral se rompe explícitamente.