2.1. Simetrías globales y locales

Se dice que los sistemas físicos tienen simetrías si permanecen invariantes bajo una transformación. Estas simetrías habitualmente están asociadas a cantidades que se conservan.

Sin embargo, no es posible hablar de simetrías sin mencionar el **teorema de Noether**, el cual establece que si un Lagrangiano posee una simetría continua, entonces existe una corriente asociada a esa simetría que se conserva cuando las ecuaciones de movimiento se satisfacen.

Veamos esto con un ejemplo. Sea $\mathcal{L}$ el Lagrangiano para un campo complejo ϕ:

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2|\phi|^2. \tag{2.1.1}$$

Este Lagrangiano es invariante bajo $\phi \to \mathrm{e}^{-i\alpha}\phi$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$. Esta transformación representa una *simetría* del Lagrangiano. Existen dos grados de libertad independientes en un campo complejo ϕ, es decir, $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ o, de manera más conveniente, ϕ y ϕ^*, por lo que el Lagrangiano adopta la forma

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial_\mu \phi^*) - m^2\phi\phi^*, \tag{2.1.2}$$

cuyas transformaciones de simetria son:

$$\phi \to \mathrm{e}^{-i\alpha}\phi, \quad \phi^* \to \mathrm{e}^{i\alpha}\phi^*. \tag{2.1.3}$$

Dado que la simetría depende de un parámetro continuo α, podemos realizar variaciones infinitesimales del campo. La variación del Lagrangiano está dada por

$$0 = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\alpha} = \sum_n \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_n} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_n)} \right] \frac{\delta\phi_n}{\delta\alpha} + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_n)} \frac{\delta\phi_n}{\delta\alpha} \right] \right\}, \tag{2.1.4}$$

donde ϕ_n puede ser ϕ o ϕ^*.

Cuando se satisfacen las ecuaciones de movimiento, el primer término entre corchetes se anula y esta expresión se reduce a $\partial_\mu J_\mu = 0$, donde hemos definido la **corriente de Noether** como

$$J_\mu = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_n)} \frac{\delta\phi_n}{\delta\alpha} \tag{2.1.5}$$

Aplicando esta definición a nuestro Lagrangiano, notamos que

$$\frac{\delta\phi}{\delta\alpha} = -i\phi, \quad \frac{\delta\phi^*}{\delta\alpha} = i\phi^* \tag{2.1.6}$$

lo que implica que la corriente toma la forma

$$J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{\delta \phi}{\delta \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \frac{\delta \phi^*}{\delta \alpha} = -i(\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi). \tag{2.1.7}$$

Podemos verificar explícitamente que la divergencia de esta corriente

$$\partial_\mu J_\mu = -i[\phi \Box \phi^* - \phi^* \Box \phi] \tag{2.1.8}$$

es igual a cero cuando las ecuaciones de movimiento, $\Box\phi = -m^2\phi$ y $\Box\phi^* = -m^2\phi^*$, se satisfacen. Un campo vectorial J_μ cuya divergencia es nula define lo que conocemos como una **corriente conservada**.

2.1.1. Simetrías globales

Las **simetrías internas globales** son aquellas que involucran transformaciones de los campos que son independientes de las coordenadas del espaciotiempo, y dejan la dinámica del sistema invariante. El término *global* denota que la misma fase o matriz de transformación se aplica a los campos en todos los puntos del espaciotiempo.

La aplicación del teorema de Noether en presencia de una simetría global implica la existencia de una corriente conservada $J_i^\mu(x)$ para cada generador T^i del grupo de simetría global, con sus respectivas cargas conservadas asociadas:

$$Q_i \equiv \int \mathrm{d}^3x\, J_i^0(x) \tag{2.1.9}$$

las cuales satisfacen las mismas relaciones de conmutación del álgebra de Lie del grupo de simetría

$$[T^i, T^j] = ic_{ijk}T^k \implies [Q_i, Q_j] = ic_{ijk}Q_k. \tag{2.1.10}$$

Debemos recordar que la aplicación del teorema de Noether a las teorías cuánticas de campos (QFTs) debe hacerse cuidadosamente, ya que es posible que los efectos cuánticos impidan la conservación clásica de las corrientes $J_i^\mu(x)$. Esto resulta en una divergencia no nula de orden $\hbar$, $\partial_\mu J_\alpha^\mu(x) = \mathcal{O}(\hbar)$, lo que implica una violación de la simetría o **anomalía**, imperceptible a nivel clásico. Usualmente, las anomalías surgen debido a la minuciosa construcción de operadores compuestos bien definidos que implementen las transformaciones de simetría una vez cuantizada la teoría.

Una **simetría global exacta** puede manifestarse de dos formas distintas, dependiendo de las propiedades de la transformación del estado base de la teoría bajo dicha simetría. Supongamos que la dinámica es exactamente invariante bajo el grupo de simetría G, con un álgebra de Lie dada por los generadores T_i

con cargas conservadas Q_i. Imaginemos ahora que los generadores se eligen como combinaciones lineales apropiadas, de tal forma que un subconjunto de las cargas aniquila el vacío físico

$$Q_\alpha|0\rangle = 0 \tag{2.1.11}$$

El conjunto de estos generadores debe formar el álgebra de Lie de un subgrupo $H \subset G$, puesto que $Q_\alpha|0\rangle = Q_\beta|0\rangle = 0 \implies [Q_\alpha, Q_\beta]|0\rangle = 0$. En este caso, decimos que la simetría corresponde a la realización de Wigner-Weyl. Por otro lado, los generadores bajo los cuales el vacío **no** es invariante corresponden a la realización de simetría de Nambu-Goldstone. Por hipótesis, G se preserva en la dinámica, por lo que estos últimos generadores siguen conmutando con el Hamiltoniano, dando como resultado nuevos estados que también son estados de mínima energía, i.e. el vacío está degenerado.

Por el momento omitiremos los detalles acerca del rompimiento espontáneo de simetría, pero podemos mencionar sus consecuencias fundamentales. Para los generadores que dan lugar a la realización de simetría de Nambu-Goldstone, la no invariancia del estado base se traduce en propiedades de transformación complicadas para los multipletes construidos a partir de estos. Además, la existencia de una simetría dinámica exacta subyacente dejar de ser intuitiva fenomenológicamente. Físicamente, al rompimiento espontáneo de una simetría se le atribuye la aparición de una partícula sin masa, conocida como **bosón de Goldstone**.

En realidad, las simetrías globales exactas ocurren raramente en la naturaleza, por lo que es frecuente encontrar **simetrías globales aproximadas**. En estos casos, el rompimiento de la simetría es pequeño, lo cual nos permite tratarla como exacta a orden 0 e introducir el rompimiento explícito mediante un tratamiento perturbativo.

2.1.2. $SU(2)$ como simetría global

El grupo $SU(2)$ es importante en muchos aspectos, entre los que se encuentra la descripción del momento angular de espín en mecánica cuántica, que es isomorfo al momento angular orbital (satisfacen la misma álgebra de Lie con diferentes generadores) y que también describe el isospín, relevante cuando se habla de nucleones, quarks ligeros y en la interacción débil.

Este grupo corresponde al grupo de transformaciones especiales unitarias que actúan sobre vectores $2D$ y la ley multiplicativa corresponde a la multiplicación de matrices usual. La representación fundamental son las matrices 2×2 que actúan sobre estos vectores. Como se mencionó anteriormente, este grupo tiene $2^2 - 1$ parámetros, lo cual corresponde a 3 generadores, denotados por J_1, J_2, J_3. Un conjunto de generadores adecuados puede escribirse en términos de las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.1.12}$$

El álgebra de Lie es

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \tag{2.1.13}$$

donde ϵ_{ijk} corresponde a las constantes de estructura y se le conoce como **símbolo de Levi-Civita**, y habitualmente se le denomina erróneamente como *tensor de Levi-Civita*.

Números cuánticos

El **invariante de Casimir** es una función $f(J)$ que conmuta con todos los generadores J_i, i.e. $[f(J), J_i] = 0$. Para esta representación el único invariante de Casimir es

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \tag{2.1.14}$$

Que conmuten nos dice que pueden tener observables simultáneos y a partir de esto podemos construir eigenestados simultáneos $|jm\rangle$ y uno de los generadores, usualmente J_3, con sus correspondientes eigenvalores

$$\begin{aligned} J^2|jm\rangle &= j(j+1)|jm\rangle, \\ J_3|jm\rangle &= m|jm\rangle, \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

donde $-j \leq m \leq j$ con $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ...$.

Y recordaremos que mediante los operadores escalera (ascenso y descenso) definidos como

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2. \tag{2.1.16}$$

podemos generar diferentes estados en un multiplete

$$J_{\pm}|jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j, m \pm 1\rangle \tag{2.1.17}$$

subiendo o bajando m una unidad, respectivamente.

Representación $2D$

Al inicio de esta sección, comenzamos con una representación en $2D$ para motivar el grupo $SU(2)$, derivamos su álgebra de Lie y encontramos una forma de identificar a los eigenestados de los generadores mediante resultados de la teoría del momento angular, aunque mencionamos que no era la única forma de hacerlo.

Podemos formar una representación $2D$ ($j = \frac{1}{2}$) eligiendo la base (o conjunto de estados base) como los eigenvectores de σ_3,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.18}$$

que describen a una partícula de espín-$\frac{1}{2}$ arriba ($m = +\frac{1}{2}$ o $\uparrow$) y abajo ($m = -\frac{1}{2}$ o $\downarrow$), la proyección a lo largo del eje-3, respectivamente. Esta representación es la representación fundamental de la cual se pueden construir el resto de las representaciones.

Combinando representaciones

Un sistema compuesto formado por dos sistemas con momento angular j_A y j_B puede describirse en términos de la base

$$|j_A j_B m_A m_B\rangle \equiv |j_A m_A\rangle |j_B m_B\rangle. \tag{2.1.19}$$

Sin embargo, el operador

$$J = J_A + J_B \tag{2.1.20}$$

también satisface el álgebra de Lie y son los eigenvalores $J(J+1)$ y M de J^2, J_3 los números cuánticos que se conservan. De hecho, el "producto" de dos IRREP de dimensión $2j_A+1$ y $2j_B+1$ puede descomponerse como la suma de las IRREP de dimensión $2J+1$ con

$$J = |j_A - j_B|, |j_A - j_B| + 1, \ldots, j_A - j_B \tag{2.1.21}$$

en la base $|j_A j_B J M\rangle$ y

$$M = m_A + m_B. \tag{2.1.22}$$

Esta base puede expresarse en términos de las otras mediante

$$|j_A j_B J M\rangle = \sum_{m_A, m_B} C(m_A m_B; JM) |j_A j_B m_A m_B\rangle \tag{2.1.23}$$

con C los coeficientes de Clebsch-Gordan.

Un ejemplo simple de esta última expresión ocurre al considerar la descripción de un sistema de dos nucleones. Cada nucleón tiene espín $\frac{1}{2}$, por lo que puede tener espín total $S = 1$ o 0 con triplete de espín y singulete, respectivamente.

$$\begin{cases} |S=1, M_S=1\rangle & =\uparrow\uparrow \\ |S=1, M_S=0\rangle & = \sqrt{\frac{1}{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \\ |S=1, M_S=-1\rangle & =\downarrow\downarrow \end{cases} \tag{2.1.24}$$
$$|S=0, M_S=0\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow).$$

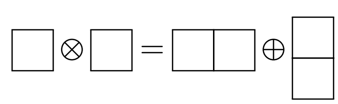
Y análogamente, con isospín $I = \frac{1}{2}$ y $I_3 = \pm\frac{1}{2}$ para protones y neutrones, respectivamente. Y con isospín total de $I = 1$ o 0.

$$\begin{cases} |I=1, I_3=1\rangle = pp, \\ |I=1, I_3=0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(pn+np), \\ |I=1, I_3=-1\rangle = nn, \end{cases} \tag{2.1.25}$$
$$|I=0, I_3=0\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(pn-np).$$

Esta descomposición podemos escribirla simbólicamente como

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1 \tag{2.1.26}$$

que se obtiene usando el tamaño del multiplete para identificar a las IRREPS; es decir, a partir del valor máximo y mínimo del espín, 1 y 0, mediante la relación $2S+1$. Esto a su vez puede verse visualmente mediante su diagrama de Young:



De esto podemos rescatar que tenemos 3 estados simétricos y 1 antisimétrico.

2.1.3. Simetrías locales

Las **simetrías locales de gauge** surgen al promover los parámetros invariantes de una simetría interna a funciones dependientes de las coordenadas del espaciotiempo. En esta sección nos centraremos principalmente en el estudio de una teoría de *gauge* no abeliana. Por lo que el análogo de (2.1.3) es

$$\phi \to \mathrm{e}^{-i\alpha(x)}\phi, \quad \phi^* \to \mathrm{e}^{i\alpha(x)}\phi^*. \tag{2.1.27}$$

Para entender la importancia de las simetrías locales, consideramos el rol que juega el número cuántico de color en QCD—la teoría de campo local que describe el sector de la interacción fuerte dentro del SM. QCD es una teoría de *gauge* que exhibe una invarianza exacta bajo transformaciones de *gauge* locales, donde rotaciones unitarias independientes de $SU(3)$ aplicadas a los campos de tres quarks $\psi_n(x)$ en puntos arbitrarios del espaciotiempo dejan invariante la física subyacente.

La forma habitual de distinguir a estos quarks es refiriéndonos a ellos como rojo R, verde G y azul B; pero sin importar a qué quark le asignemos cada uno de estos nombres, los ejes de color pueden ser rotados de una forma arbitraria y local durante la evolución del sistema sin alterar ningún observable físico. A estos observables se les conoce como **invariantes de gauge**. Para el caso del grupo $SU(N)$, los observables definidos a partir de campos fermiónicos en la representación fundamental incluyen operadores compuestos

$$S(x) \equiv \overline{\psi}_n(x)\psi_n(x), \tag{2.1.28}$$

$$J^\mu(x) \equiv \overline{\psi}_n(x)\gamma^\mu\psi_n(x), \tag{2.1.29}$$

$$N(x) \equiv \epsilon_{n_1 n_2 \cdots n_N}\psi_{n_1}(x)\psi_{n_2}(x)\cdots\psi_{n_N}(x). \tag{2.1.30}$$

Se dice que estos campos locales son **incoloros** (*colorless*) o de **color neutro** (*color neutral*), y son los únicos que representan verdaderos observables físicos medibles.