Capítulo 1

Preliminares matemáticos

En física es habitual adoptar un enfoque pragmático de las matemáticas, relegando su formalismo abstracto un segundo plano la mayor parte del tiempo. Sin embargo, cuando nuestro estudio se dirige a los constituyentes más fundamentales del Universo, resulta indispensable familiarizarse con herramientas más rigurosas como los grupos y álgebras de Lie. Estas estructuras matemáticas son el lenguaje natural para describir las simetrías globales y de *gauge*. Son útiles no solo para representar simetrías en el espaciotiempo (como traslaciones, rotaciones y transformaciones de Lorentz), sino también para describir simetrías internas intrínsecas a las partículas, como el isospín o la carga de color.

1.1. Grupos de Lie

1.1.1. Definiciones y propiedades generales

Los grupos de Lie son grupos con una estructura adicional: la de variedad diferencial. Recordemos que un **grupo** G es un conjunto de elementos $g_1, g_2, \ldots$ que satisface los siguientes axiomas

1. **Cerradura**: Para cada $g_1, g_2 \in G$, el producto $g_1 g_2 = g_3$ también pertenece a G.
2. **Asociatividad**: Para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$, $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$.
3. **Identidad**: Existe un elemento identidad $I \in G$ tal que $Ig = gI = g$ para todo $g \in G$.
4. **Inverso**: Para cada $g \in G$ existe un elemento inverso g^{-1} tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = I$ para todo $g \in G$.

Nótese que los elementos del grupo pueden ser discretos o depender de parámetros continuos. Entre los casos especiales destacan los **grupos abelianos**, en los que $g_1 g_2 = g_2 g_1$ para todo $g_1, g_2 \in G$, es decir, los elementos conmutan; en caso contrario, el grupo es **no abeliano**. Un subconjunto de elementos de G que forma un grupo bajo la misma ley multiplicativa recibe el nombre de **subgrupo** de G.

Un **grupo de Lie** es un grupo G que además tiene la estructura de una variedad diferenciable, de modo que el producto e inverso son suaves (infinitamente diferenciables). La mayoría de los grupos de Lie de interés en física de partículas son compactos, lo que significa que son cerrados y acotados—contienen todos sus puntos límite y no se extienden al infinito. Los grupos $SU(n)$ son ejemplos de grupos compactos.

Finalmente, dado que en física es frecuente trabajar con más de un grupo a la vez, conviene mencionar el **producto directo** de dos grupos G y H usualmente denotado por $G \times H$. En el contexto de grupos abelianos, a esta misma construcción se le conoce como la suma directa, denotada por $G \oplus H$.

1.1.2. Algunos ejemplos de grupos de Lie

Los grupos de mayor utilidad en el Modelo Estándar pertenecen a la clase de los **grupos matriciales de Lie**, que son subgrupos del grupo lineal general. El **grupo lineal general** $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ es el conjunto de todas las matrices $n \times n$ invertibles con entradas reales; de manera análoga, $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ representa a las matrices con entradas complejas. Un grupo matricial de Lie es entonces cualquier grupo cerrado de $\mathrm{GL}(n;V)$ para algún espacio vectorial V. A continuación se presentan los ejemplos más relevantes para estas notas.

Grupo unitario $U(n)$

El grupo unitario $U(n)$ es el subgrupo formado por matrices unitarias U que satisfacen

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I.$$

El caso más sencillo es $U(1)$, que corresponde al grupo de transformaciones unitarias de fase sobre los números complejos. Dado $z \in \mathbb{C}$, la acción de $U(1)$ es $z \mapsto \mathrm{e}^{i\theta} z$ con $\theta \in [0, 2\pi]$. Esto se comprende de manera visual al notar que $U(1)$ es isomorfo al círculo unitario S^1.

Grupo especial unitario $SU(n)$

El grupo especial unitario $SU(n)$ es el subgrupo de $U(n)$ formado por aquellas matrices cuyo determinante es igual a 1. Esta condición restringe un grado de libertad, por lo que la dimensión de este grupo es $n^2 - 1$.

El caso más inmediato es $SU(2)$, que depende de tres parámetros continuos y puede parametrizarse como

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ y } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Este grupo es isomorfo a la esfera unitaria S^3. Físicamente, es la herramienta matemática subyacente para describir el espín y el isospín.

Por su parte, $SU(3)$ es el grupo de matrices 3×3 complejas unitarias con determinante igual a 1 y juega un rol central en la física hadrónica, correspondiendo a la carga de color en cromodinámica cuántica (QCD).

2.3. Álgebras de Lie

2.3.1. Definiciones

Un grupo de Lie y su ley multiplicativa pueden estudiarse localmente a través de transformaciones infinitesimales por su **álgebra de Lie** asociada. Esta álgebra está conformada por N **generadores** (operadores) T^i, con $i = 1, 2, \cdots, N$, que satisfacen las reglas de conmutación

$$[T^i, T^j] = ic_{ijk}T^k, \tag{2.3.1}$$

donde la suma sobre el índice repetido k está implícita y los coeficientes $c_{ijk} = -c_{jik}$ son las **constantes de estructura** de G. Sin pérdida de generalidad, podemos elegir que T^i sean hermíticos, lo que garantiza que sus constantes de estructura son reales. Si $c_{ijk} = 0$, entonces G es abeliano. Cualquier elemento del grupo G puede representarse como una serie de potencias por medio de operadores unitarios

$$U_G(\vec{\beta}) = \exp[-i\beta^i T^i] \equiv \mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{T}} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\vec{\beta}\cdot\vec{T})^k}{k!}, \tag{2.3.2}$$

donde $\beta^1 \cdots \beta^N$ son N parámetros reales continuos. En particular, el elemento identidad corresponde a $U_G(0) = I$ y el inverso de $U_G(\vec{\beta})$ está dado por

$$U_G(\vec{\beta})^{-1} = U_G(-\vec{\beta}) = \mathrm{e}^{i\vec{\beta}\cdot\vec{T}} = U_G(\vec{\beta})^{\dagger}. \tag{2.3.3}$$

Para valores pequeños de $|\vec{\beta}|$, es suficiente truncar la serie (2.3.2) hasta el término lineal,

$$U_G(\vec{\beta}) \simeq I - i\vec{\beta}\cdot\vec{T} + \mathcal{O}(\beta_i\beta_j). \tag{2.3.4}$$

Esto significa que los generadores del álgebra de Lie describen por completo a la vecindad de la identidad. El álgebra también dicta la ley multiplicativa del grupo para parámetros $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ finitos. Esto es

$$U_G(\vec{\alpha})U_G(\vec{\beta}) = \mathrm{e}^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}}\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{T}} \equiv U_G(\vec{\gamma}). \tag{2.3.5}$$

$\vec{\gamma}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ puede determinarse íntegramente a partir del álgebra de Lie utilizando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH). Aunque esta serie no siempre converge globalmente, para $|\vec{\alpha}|$ y $|\vec{\beta}|$ lo suficientemente pequeños tenemos:

$$\vec{\gamma}\cdot\vec{T} = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})\cdot\vec{T} - \frac{i}{2}[\vec{\alpha}\cdot\vec{T}, \vec{\beta}\cdot\vec{T}] + \text{h.o.t.} \tag{2.3.6}$$

La verdadera potencia de estas estructuras abstractas en la física radica en su capacidad para actuar sobre distintos espacios vectoriales, como los espacios de Hilbert que albergan los estados cuánticos. Cuando asignamos a los elementos del grupo una forma matricial concreta actuando sobre un espacio específico, construimos una **representación** del grupo.

2.3.2. Representaciones

Una representación es, en esencia, una traducción del álgebra abstracta al lenguaje de las transformaciones lineales (álgebra lineal).

Consideremos un conjunto de matrices $n \times n$ denotadas como $L^i, i = 1, 2, \cdots N$. Si los elementos L^i satisfacen la misma álgebra que los generadores,

$$[L^i, L^j] = ic_{ijk}L^k, \tag{2.3.7}$$

entonces L^i (algunas veces escrito como L^i_n) forman una representación del álgebra. Análogamente, las matrices $\mathrm{e}^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{L}}$ forman una representación del grupo para los elementos $U_G(\vec{\beta})$ y preservan la misma ley multiplicativa.

El **rango** de un grupo de Lie se define como el número de generadores que son simultáneamente diagonalizables. Físicamente, estos generadores corresponden a números cuánticos que se conservan si conmutan con el Hamiltoniano.

Dos representaciones $n \times n$, L^i y L'^i, son **equivalentes** si existe una $n \times n$ matriz unitaria U tal que

$$L'^i = UL^iU^\dagger, \quad i = 1 \cdots N. \tag{2.3.8}$$

De lo contrario, no lo son. Una representación L^i es **reducible** si es equivalente a una representación estructurada en bloques diagonales,

$$L'^i = \begin{pmatrix} L'^i_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L'^i_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L'^i_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.3.9}$$

donde cada bloque actúa de forma independiente sobre un subespacio único. En caso contrario, se dice que es **irreducible** (IRREP). Los estados bajo una representación reducible se separan en sectores aislados que no están relacionados por la simetría, mientras que todos los estados en una misma IRREP están relacionados por las transformaciones del grupo.

La **representación fundamental** es, *grosso modo*, la representación no trivial de menor dimensión, a partir de la cual se pueden generar otras representaciones mediante productos directos.

Por otro lado, la **representación adjunta** o **regular** de un grupo de Lie es aquella representación de dimensión $N \times N$ cuyos elementos se construyen directamente a partir de las constantes de estructura:

$$(L^i_{\text{adj}})_{jk} = -ic_{ijk}. \tag{2.3.10}$$

Esta representación adjunta es esencial para definir las autointeracciones de los campos en una teoría de *gauge* no abeliana.

Finalmente, si L^i_n es una representación de dimensión n, entonces su **conjugada** $L^i_{n^*} \equiv -L^{i*}_n = -L^{iT}_n$ también es una representación. Una representación se dice **real** si es equivalente a su propia conjugada; es decir, si existe una matriz unitaria U tal que $-L^{i*}_n = U L^i_n U^\dagger$ para todo i; de lo contrario, se denomina **compleja**.