

1.2. Álgebras de Lie

1.2.1. Definiciones

Un grupo de Lie y su ley multiplicativa pueden estudiarse localmente a través de transformaciones infinitesimales por su **álgebra de Lie** asociada. Esta álgebra está conformada por N **generadores** (operadores) T^i , con $i = 1, 2, \dots, N$, que satisfacen las reglas de conmutación

$$[T^i, T^j] = ic_{ijk}T^k, \quad (1.2.1)$$

donde la suma sobre el índice repetido k está implícita y los coeficientes $c_{ijk} = -c_{jik}$ son las **constantes de estructura** de G . Sin pérdida de generalidad, podemos elegir que T^i sean hermíticos, lo que garantiza que sus constantes de estructura son reales. Si $c_{ijk} = 0$, entonces G es abeliano. Cualquier elemento del grupo G puede representarse como una serie de potencias por medio de operadores unitarios

$$U_G(\vec{\beta}) = \exp[-i\beta^i T^i] \equiv e^{-i\vec{\beta} \cdot \vec{T}} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\vec{\beta} \cdot \vec{T})^k}{k!}, \quad (1.2.2)$$

donde $\beta^1 \dots \beta^N$ son N parámetros reales continuos. En particular, el elemento identidad corresponde a $U_G(0) = I$ y el inverso de $U_G(\vec{\beta})$ está dado por

$$U_G(\vec{\beta})^{-1} = U_G(-\vec{\beta}) = e^{i\vec{\beta} \cdot \vec{T}} = U_G(\vec{\beta})^\dagger. \quad (1.2.3)$$

Para valores pequeños de $|\vec{\beta}|$, es suficiente truncar la serie (1.2.2) hasta el término lineal,

$$U_G(\vec{\beta}) \simeq I - i\vec{\beta} \cdot \vec{T} + \mathcal{O}(\beta_i \beta_j). \quad (1.2.4)$$

Esto significa que los generadores del álgebra de Lie describen por completo a la vecindad de la identidad. El álgebra también dicta la ley multiplicativa del grupo para parámetros $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ finitos. Esto es

$$U_G(\vec{\alpha})U_G(\vec{\beta}) = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{T}} e^{-i\vec{\beta} \cdot \vec{T}} \equiv U_G(\vec{\gamma}). \quad (1.2.5)$$

$\vec{\gamma}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ puede determinarse íntegramente a partir del álgebra de Lie utilizando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH). Aunque esta serie no siempre converge globalmente, para $|\vec{\alpha}|$ y $|\vec{\beta}|$ lo suficientemente pequeños tenemos:

$$\vec{\gamma} \cdot \vec{T} = (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot \vec{T} - \frac{i}{2} [\vec{\alpha} \cdot \vec{T}, \vec{\beta} \cdot \vec{T}] + \text{h.o.t.} \quad (1.2.6)$$

La verdadera potencia de estas estructuras abstractas en la física radica en su capacidad para actuar sobre distintos espacios vectoriales, como los espacios de Hilbert que albergan los estados cuánticos. Cuando asignamos a los elementos del grupo una forma matricial concreta actuando sobre un espacio específico, construimos una **representación** del grupo.

1.2.2. Representaciones

Una representación es, en esencia, una traducción del álgebra abstracta al lenguaje de las transformaciones lineales (álgebra lineal).

Consideremos un conjunto de matrices $n \times n$ denotadas como $L^i, i = 1, 2, \dots, N$. Si los elementos L^i satisfacen la misma álgebra que los generadores,

$$[L^i, L^j] = i c_{ijk} L^k, \quad (1.2.7)$$

entonces L^i (algunas veces escrito como L_n^i) forman una representación del álgebra. Análogamente, las matrices $e^{-i\vec{\beta} \cdot \vec{L}}$ forman una representación del grupo para los elementos $U_G(\vec{\beta})$ y preservan la misma ley multiplicativa.

El **rango** de un grupo de Lie se define como el número de generadores que son simultáneamente diagonalizables. Físicamente, estos generadores corresponden a números cuánticos que se conservan si conmutan con el Hamiltoniano.

Dos representaciones $n \times n, L^i$ y L'^i , son **equivalentes** si existe una $n \times n$ matriz unitaria U tal que

$$L'^i = U L^i U^\dagger, \quad i = 1 \dots N. \quad (1.2.8)$$

De lo contrario, no lo son. Una representación L^i es **reducible** si es equivalente a una representación estructurada en bloques diagonales,

$$L'^i = \begin{pmatrix} L_A^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_B^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_C^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.2.9)$$

donde cada bloque actúa de forma independiente sobre un subespacio único. En caso contrario, se dice que es **irreducible** (IRREP). Los estados bajo una representación reducible se separan en sectores aislados que no están relacionados por la simetría, mientras que todos los estados en una misma IRREP están relacionados por las transformaciones del grupo.

La **representación fundamental** es, *grosso modo*, la representación no trivial de menor dimensión, a partir de la cual se pueden generar otras representaciones mediante productos directos.

Por otro lado, la **representación adjunta** o **regular** de un grupo de Lie es aquella representación de dimensión $N \times N$ cuyos elementos se construyen directamente a partir de las constantes de estructura:

$$(L_{\text{adj}}^i)_{jk} = -i c_{ijk}. \quad (1.2.10)$$

Esta representación adjunta es esencial para definir las autointeracciones de los campos en una teoría de *gauge* no abeliana.

Finalmente, si L_n^i es una representación de dimensión n , entonces su **conjugada** $L_{n^*}^i \equiv -L_n^{i*} = -L_n^{iT}$ también es una representación. Una representación se dice **real** si es equivalente a su propia conjugada; es decir, si existe una matriz unitaria U tal que $-L_n^{i*} = UL_n^i U^\dagger$ para todo i ; de lo contrario, se denomina **compleja**.