1.1. Grupos de Lie

1.1.1. Definiciones y propiedades generales

Los grupos de Lie son grupos con una estructura adicional: la de variedad diferencial. Recordemos que un **grupo** G es un conjunto de elementos $g_1, g_2, \ldots$ que satisface los siguientes axiomas

1. **Cerradura**: Para cada $g_1, g_2 \in G$, el producto $g_1 g_2 = g_3$ también pertenece a G.
2. **Asociatividad**: Para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$, $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$.
3. **Identidad**: Existe un elemento identidad $I \in G$ tal que $Ig = gI = g$ para todo $g \in G$.
4. **Inverso**: Para cada $g \in G$ existe un elemento inverso g^{-1} tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = I$ para todo $g \in G$.

Nótese que los elementos del grupo pueden ser discretos o depender de parámetros continuos. Entre los casos especiales destacan los **grupos abelianos**, en los que $g_1 g_2 = g_2 g_1$ para todo $g_1, g_2 \in G$, es decir, los elementos conmutan; en caso contrario, el grupo es **no abeliano**. Un subconjunto de elementos de G que forma un grupo bajo la misma ley multiplicativa recibe el nombre de **subgrupo** de G.

Un **grupo de Lie** es un grupo G que además tiene la estructura de una variedad diferenciable, de modo que el producto e inverso son suaves (infinitamente diferenciables). La mayoría de los grupos de Lie de interés en física de partículas son compactos, lo que significa que son cerrados y acotados—contienen todos sus puntos límite y no se extienden al infinito. Los grupos $SU(n)$ son ejemplos de grupos compactos.

Finalmente, dado que en física es frecuente trabajar con más de un grupo a la vez, conviene mencionar el **producto directo** de dos grupos G y H usualmente denotado por $G \times H$. En el contexto de grupos abelianos, a esta misma construcción se le conoce como la suma directa, denotada por $G \oplus H$.

1.1.2. Algunos ejemplos de grupos de Lie

Los grupos de mayor utilidad en el Modelo Estándar pertenecen a la clase de los **grupos matriciales de Lie**, que son subgrupos del grupo lineal general. El **grupo lineal general** $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ es el conjunto de todas las matrices $n \times n$ invertibles con entradas reales; de manera análoga, $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ representa a las matrices con entradas complejas. Un grupo matricial de Lie es entonces cualquier grupo cerrado de $\mathrm{GL}(n;V)$ para algún espacio vectorial V. A continuación se presentan los ejemplos más relevantes para estas notas.

Grupo unitario $U(n)$

El grupo unitario $U(n)$ es el subgrupo formado por matrices unitarias U que satisfacen

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I.$$

El caso más sencillo es $U(1)$, que corresponde al grupo de transformaciones unitarias de fase sobre los números complejos. Dado $z \in \mathbb{C}$, la acción de $U(1)$ es $z \mapsto \mathrm{e}^{i\theta} z$ con $\theta \in [0, 2\pi]$. Esto se comprende de manera visual al notar que $U(1)$ es isomorfo al círculo unitario S^1.

Grupo especial unitario $SU(n)$

El grupo especial unitario $SU(n)$ es el subgrupo de $U(n)$ formado por aquellas matrices cuyo determinante es igual a 1. Esta condición restringe un grado de libertad, por lo que la dimensión de este grupo es $n^2 - 1$.

El caso más inmediato es $SU(2)$, que depende de tres parámetros continuos y puede parametrizarse como

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ y } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Este grupo es isomorfo a la esfera unitaria S^3. Físicamente, es la herramienta matemática subyacente para describir el espín y el isospín.

Por su parte, $SU(3)$ es el grupo de matrices 3×3 complejas unitarias con determinante igual a 1 y juega un rol central en la física hadrónica, correspondiendo a la carga de color en cromodinámica cuántica (QCD).