

Entrega: 28 de marzo de 2025

1. Propiedades de los números complejos

Problema 1: Propiedades de los números complejos

(5 pts)

Considere los siguientes números complejos:

$$a = (2 + 3i)(4 + i), \quad (1.1)$$

$$b = \frac{2 + 3i}{4 + i}. \quad (1.2)$$

(a) Exprese cada número en la forma $x + iy$.

SOLUCIÓN

Para expresar cada uno de los números de la forma deseada primero desarrollamos cada una de las expresiones. Por un lado, [Ecuación \(1.1\)](#) queda como

$$\begin{aligned} a &= 2(4) + 2i + 3i(4) + 3i(i), \\ &= (8 - 3) + i(2 + 12), \\ \boxed{a = 5 + 14i}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

con $x = 5$ y $y = 14$.

Por el otro, Ecuación (1.2) se ve como

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{2+3i}{4+i} \frac{4-i}{4-i}, \\
 &= \frac{(2+3i)(4-i)}{4^2 - i^2}, \\
 &= \frac{8-2i+12i+3}{17}, \\
 &= \frac{8+3}{17} + \frac{12-2}{17}i, \\
 \boxed{b &= \frac{11}{17} + \frac{10}{17}i}, \tag{1.4}
 \end{aligned}$$

$$\text{con } x = \frac{11}{17} \text{ y } y = \frac{10}{17}.$$

(b) Calcule el complejo conjugado de a y b .

SOLUCIÓN

De los resultados del inciso anterior, tenemos que el complejo conjugado de Ecuación (1.3) es

$$\boxed{a^* = 5 - 14i.}$$

y de Ecuación (1.4)

$$\boxed{b^* = \frac{11}{17} - \frac{10}{17}i.}$$

(c) Exprese cada número en la forma polar, $re^{i\theta}$.

SOLUCIÓN

Para pasar a la forma polar primero debemos recordar que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Así, para a tenemos que

$$r = \sqrt{5^2 + 14^2} = \sqrt{221},$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{14}{5}\right).$$

Entonces, [Ecuación \(1.3\)](#) en su representación polar se ve como:

$$a = \sqrt{221}e^{i\arctan\left(\frac{14}{5}\right)}. \quad (1.5)$$

Para [Ecuación \(1.4\)](#) tenemos

$$r = \sqrt{\left(\frac{11}{17}\right)^2 + \left(\frac{10}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{17}},$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{10}{11}\right).$$

Tal que,

$$b = \sqrt{\frac{13}{17}}e^{i\arctan\left(\frac{10}{11}\right)}.$$

- (d) Calcule a^5 y $\sqrt{b}$. Use la representación más conveniente para cada operación, pero exprese el resultado en la forma $x + iy$.

SOLUCIÓN

Para calcular a^5 usamos la representación dada por [Ecuación \(1.3\)](#), tal que,

$$\begin{aligned} a^5 &= \left(\sqrt{221}e^{i\arctan(14/5)}\right)^5, \\ &= (221)^{5/2}e^{i5\arctan(14/5)}, \end{aligned}$$

donde $r = (221)^{5/2}$ y $\theta = 5\arctan(14/5) - 2\pi$. Entonces,

$$a^5 = (221)^{5/2} \left[\cos \left(5 \arctan(14/5) - 2\pi \right) + i \sin \left(5 \arctan(14/5) - 2\pi \right) \right],$$

$$a^5 = 718525 - 104426i.$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \sqrt{b} &= \left[\left(\frac{13}{17} \right)^{1/2} e^{i \arctan(10/11)} \right]^{1/2}, \\ &= \left(\frac{13}{17} \right)^{1/4} e^{i \arctan(10/11)/2}, \end{aligned}$$

donde $r = (13/17)^{1/4}$ y $\theta = \arctan(10/11)/2$. Por lo que,

$$\sqrt{b} = \left(\frac{13}{17} \right)^{1/4} \left[\cos \left(\frac{\arctan(10/11)}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\arctan(10/11)}{2} \right) \right],$$

$$\sqrt{b} = 0.8722 + 0.3372i.$$

Problema 2**(15 pts)**

Muestre lo siguiente:

- (a) Si $a = x + iy$, entonces $a \cdot a^* = \|a\|^2$.

SOLUCIÓNSabemos que el conjugado a^* es

$$a^* = x - iy.$$

Entonces, calculando el producto

$$\begin{aligned} a \cdot a^* &= (x + iy)(x - iy), \\ &= x \cdot x - ix \cdot y + iy \cdot x - (iy)(iy), \\ &= x^2 - (-y^2), \\ a \cdot a^* &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Recordando que $\|a\| = \sqrt{x^2 + y^2} \implies \|a\|^2 = x^2 + y^2$. Entonces,

$$a \cdot a^* = \|a\|^2.$$

- (b) Si $a = r_1 e^{i\theta_1}$ y $b = r_2 e^{i\theta_2}$, con $r_i, \theta_i \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN

Calculando el producto

$$\begin{aligned} ab &= (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}), \\ &= r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}, \quad e^{x+y} = e^x e^y \end{aligned}$$

$$= r_1 r_2 e^{i\theta_1 + i\theta_2},$$

$$ab = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

(c) Si $a = re^{i\theta}$, con $r, \theta \in \mathbb{R}$, entonces $|a| = r$.

SOLUCIÓN

Sea

$$\begin{aligned} |a| &= |re^{i\theta}| = |r||e^{i\theta}|, \\ &= |r||\cos(\theta) + i\sin(\theta)|, \\ &= r\sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}, \\ &= r\sqrt{1}, \end{aligned}$$

$$|a| = r.$$

(d) Si $a = re^{ix+y}$, con $r, x, y \in \mathbb{R}$, entonces $|a| = re^y$.

SOLUCIÓN

Sea

$$\begin{aligned} |a| &= |re^{ix+y}| = |r||e^{ix+y}|, \\ &= r|e^{ix}e^y|, \\ &= r|e^y||e^{ix}|, \\ &= re^y\sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)}, \end{aligned}$$

$$|a| = re^y.$$

2. Notación BraKet

Problema 3: Notación BraKet

Considere los operadores

$$\hat{S}^\dagger = |0\rangle\langle 0| - i|1\rangle\langle 1|, \quad (3.1)$$

$$\hat{T} = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|. \quad (3.2)$$

y los kets

$$|\psi\rangle = \frac{1+i}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle, \quad (3.3)$$

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}|1\rangle. \quad (3.4)$$

(a) Muestre que los operadores son unitarios y que los kets están normalizados.

SOLUCIÓN

Un operador es unitario si

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I}.$$

Por un lado, para [Ecuación \(3.1\)](#) tenemos que

$$\hat{S} = |0\rangle\langle 0| + i|1\rangle\langle 1|.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \hat{S}\hat{S}^\dagger &= (|0\rangle\langle 0| + i|1\rangle\langle 1|)(|0\rangle\langle 0| - i|1\rangle\langle 1|), \\ &= |0\rangle\langle 0||0\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 0||1\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 1||0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1||1\rangle\langle 1|, \\ &= \langle 0|0\rangle|0\rangle\langle 0| - i\langle 0|1\rangle|0\rangle\langle 1| + i\langle 1|0\rangle|1\rangle\langle 0| + \langle 1|1\rangle|1\rangle\langle 1|, \\ &= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|, \end{aligned}$$

$$\hat{S}\hat{S}^\dagger = \hat{I},$$

$\therefore \hat{S}$ es unitario.

Por el otro, $\hat{T}^\dagger$ para Ecuación (3.2) es

$$\hat{T}^\dagger = i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1|.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\hat{T}\hat{T}^\dagger &= (-i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|)(i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1|), \\ &= |0\rangle\langle 1||1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1||0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0||1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0||0\rangle\langle 1|, \\ &= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|,\end{aligned}$$

$$\hat{T}\hat{T}^\dagger = \hat{I},$$

$\therefore \hat{T}$ es unitario.

Para determinar si Ecuaciones (3.3) y (3.4) están normalizados, primero calculamos $\langle\psi|$ y $\langle\phi|$. Así,

$$\langle\psi| = \frac{1-i}{2}\langle 0| - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle 1|,$$

$$\langle\phi| = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| - \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}}\langle 1|.$$

Entonces, para Ecuación (3.3),

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle &= \left(\frac{1-i}{2}\langle 0| - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle 1|\right)\left(\frac{1+i}{2}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle\right), \\ &= \frac{(1-i)(1+i)}{4}\langle 0|0\rangle + \left(\frac{1-i}{2}\right)\frac{i}{\sqrt{2}}\langle 0|1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+i}{2}\right)\langle 1|0\rangle - \frac{i^2}{2}\langle 1|1\rangle, \\ &= \frac{2}{4} + \frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1,$$

$\therefore |\psi\rangle$ está normalizado.

Para Ecuación (3.4),

$$\begin{aligned}
\langle \phi | \phi \rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0| - \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}} \langle 1| \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} |1\rangle \right), \\
&= \frac{1}{2} \langle 0|0\rangle - \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \langle 0|1\rangle - \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}} \langle 1|0\rangle + \frac{e^{-i\theta} e^{i\theta}}{2} \langle 1|1\rangle, \\
&= \frac{1}{2} + \frac{e^{-i\theta} e^{i\theta}}{2},
\end{aligned}$$

$$\langle \phi | \phi \rangle = 1,$$

$\therefore |\phi\rangle$ está normalizado.

(b) Calcule $\langle \phi | \psi \rangle$ y $\langle \psi | \phi \rangle$.

SOLUCIÓN

Calculamos $\langle \phi | \psi \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \phi | \psi \rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0| - \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}} \langle 1| \right) \left(\frac{1+i}{2} |0\rangle + \frac{i}{2} |1\rangle \right), \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1+i}{2} \langle 0|0\rangle + \frac{i}{2} \langle 0|1\rangle - \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}} \frac{1+i}{2} \langle 1|0\rangle - \frac{ie^{-i\theta}}{2} \langle 1|1\rangle,
\end{aligned}$$

$$\langle \phi | \psi \rangle = \frac{1+i}{2\sqrt{2}} - \frac{ie^{-i\theta}}{2}.$$

Y $\langle \psi | \phi \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \phi \rangle &= \left(\frac{1-i}{2} \langle 0| - \frac{i}{\sqrt{2}} \langle 1| \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} |1\rangle \right), \\
&= \frac{1-i}{2\sqrt{2}} \langle 0|0\rangle - \frac{(1-i)e^{i\theta}}{2\sqrt{2}} \langle 0|1\rangle - \frac{i}{2} \langle 1|0\rangle + \frac{ie^{i\theta}}{2} \langle 1|1\rangle,
\end{aligned}$$

$$\langle \psi | \phi \rangle = \frac{1-i}{2\sqrt{2}} + \frac{ie^{i\theta}}{2}.$$

(c) Calcule $\hat{T}|\psi\rangle$ y $\hat{S}^\dagger|\phi\rangle$.

SOLUCIÓN

Calculamos $\hat{T}|\psi\rangle$

$$\begin{aligned}\hat{T}|\psi\rangle &= (-i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|)\left(\frac{1+i}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle\right), \\ &= -\frac{i(1+i)}{2}\langle 1|0\rangle|0\rangle - \frac{i^2}{\sqrt{2}}\langle 1|1\rangle|0\rangle + \frac{i(1+i)}{2}\langle 0|0\rangle|1\rangle + \frac{i^2}{\sqrt{2}}\langle 0|1\rangle|1\rangle,\end{aligned}$$

$$\hat{T}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i-1}{2}|1\rangle.$$

Y $\hat{S}^\dagger|\phi\rangle$

$$\begin{aligned}\hat{S}^\dagger|\phi\rangle &= (|0\rangle\langle 0| - i|1\rangle\langle 1|)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}|1\rangle\right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|0\rangle|0\rangle - \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}\langle 0|1\rangle|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle 1|0\rangle|1\rangle + \frac{ie^{i\theta}}{\sqrt{2}}\langle 1|1\rangle|1\rangle,\end{aligned}$$

$$\hat{S}^\dagger|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}|1\rangle.$$

(d) Mida el estado $\hat{T}|\psi\rangle$ en la base computacional. ¿Cuál es la probabilidad de medir $|0\rangle$ y $|1\rangle$?

SOLUCIÓN

Tenemos que la probabilidad de medir $|0\rangle$ es

$$\begin{aligned}P(0) &= |\langle 0|\hat{T}|0\rangle\psi|^2, \\ &= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|0\rangle + \frac{i-1}{2}\langle 0|1\rangle\right|^2, \\ &= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2,\end{aligned}$$

$$P(0) = \frac{1}{2}.$$

Y de medir $|1\rangle$,

$$\begin{aligned} P(1) &= |\langle 1|\hat{T}|1\rangle\psi|^2, \\ &= \left| \langle 1| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i-1}{2} \right) \right|^2, \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|0\rangle + \frac{i-1}{2}\langle 1|1\rangle \right|^2, \\ &= \left| \frac{i-1}{2} \right|^2, \\ &= \left(\frac{i-1}{2} \right) \left(\frac{-i-1}{2} \right), \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$P(1) = \frac{1}{2}.$$

(e) Mida el estado $\hat{S}^\dagger|\phi\rangle$ en la base diagonal. ¿Cuál es la probabilidad de medir $|+\rangle$ y $|-\rangle$?

SOLUCIÓN

Para medir $|+\rangle$ tenemos que

$$\begin{aligned} P(+) &= |\langle +|\hat{S}^\dagger|+\rangle\phi|^2, \\ &= \left| \langle +| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{ie^{i\theta}}{\sqrt{2}}|1\rangle \right) \right|^2, \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}}\langle +|0\rangle + \frac{ie^{i\theta}}{\sqrt{2}}\langle +|1\rangle \right|^2, \\ &= \left| \frac{1}{2} + \frac{ie^{i\theta}}{2} \right|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{ie^{i\theta}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{ie^{-i\theta}}{2} \right), \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{e^{i\theta-i\theta}}{4},
 \end{aligned}$$

$$P(+)=\frac{1}{2}.$$

Mientras que para $|-\rangle$ es

$$\begin{aligned}
 P(-) &= |\langle - | \hat{S}^\dagger | - \rangle \phi|^2, \\
 &= \left| \langle - | \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{ie^{i\theta}}{\sqrt{2}} |1\rangle \right) \right|^2, \\
 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle - | 0 \rangle + \frac{ie^{i\theta}}{\sqrt{2}} \langle - | 1 \rangle \right|^2, \\
 &= \left| \frac{1}{2} - \frac{ie^{i\theta}}{2} \right|^2, \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{ie^{i\theta}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{ie^{-i\theta}}{2} \right), \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{ie^{i\theta}}{4} + \frac{ie^{-i\theta}}{4} - \frac{e^{i\theta-i\theta}}{4}, \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \right) + \frac{1}{4}, \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{\sin(\theta)}{2},
 \end{aligned}$$

$$P(-)=\frac{1+\sin(\theta)}{2}.$$

Problema 4

Muestre que la matriz

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

es unitaria, para $\theta \in (0, 2\pi)$ y $\phi \in [0, 2\pi)$.

SOLUCIÓN

Por el problema anterior sabemos que una matriz es unitaria sin

$$UU^\dagger = I,$$

con $U^\dagger$ la transpuesta conjugada de U .

Entonces, calculamos $U^\dagger$:

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Ahora, calculamos $UU^\dagger$:

$$\begin{aligned} UU^\dagger &= \begin{pmatrix} e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\phi} e^{-i\phi} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} & e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} + e^{-i\phi} e^{i\phi} \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$UU^\dagger = I,$$

$\therefore U$ es una matriz unitaria.

Problema 5

Si $\hat{H}$ es el operador Hadamard. Muestre que

$$\hat{H}^{\otimes n} |0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{i=0}^{2^n-1} |i\rangle.$$

SOLUCIÓN

Reescribiendo $\hat{H}^{\otimes n}$,

$$\hat{H}^{\otimes n} = \bigotimes_n \hat{H} |0\rangle = \bigotimes_n |+\rangle = |+\rangle^{\otimes n}.$$

Recordando que $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, tenemos que

$$|+\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{i=0}^{2^n-1} |i\rangle. \quad (5.1)$$

Si desarrollamos la expresión anterior para $n = 2$,

$$\begin{aligned} |+\rangle^{\otimes 2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \\ &= \frac{1}{2^{2/2}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle). \end{aligned}$$

Donde cada estado corresponde a la representación binaria de los números 0 a 3. Entonces, [Ecuación \(5.1\)](#) se puede generalizar a n estados como:

$$|+\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{i=0}^{2^n-1} |i\rangle.$$

Por lo tanto,

$$\hat{H}^{\otimes n} |0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{i=0}^{2^n-1} |i\rangle.$$

Problema 6

Calcula los eigenvalores y los eigenvectores de la matrix X de Pauli.

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Resolvemos el problema de eigenvalores $(\hat{X} - \lambda \hat{I}) = 0$. Primero obtenemos los eigenvalores resolviendo $\det(\hat{X} - \lambda \hat{I}) = 0$, tal que:

$$\det(\hat{X} - \lambda \hat{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix},$$

$$\implies \lambda^2 - 1 = 0,$$

$$\implies \lambda^2 = 1.$$

Por lo tanto, los eigenvalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$.

Ahora, obtenemos los eigenvectores. Para $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\implies x_2 = x_1 \wedge x_1 = x_1.$$

Por lo tanto, el eigenvector normalizado correspondiente a $\lambda_1 = 1$ es:

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, para $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\implies x_2 = -x_1 \wedge x_1 = x_1.$$

Por lo tanto, el eigenvector normalizado correspondiente a $\lambda_2 = -1$ es:

$$\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$